# Descomposición de Dirac en la Ecuación de Wheeler DeWitt para Cosmología Cuántica Canónica

Germán Chaparro, Código 132092

Director: Dr. Rer. Nat. Juan Manuel Tejeiro S.

Trabajo de Grado para optar al título de
**Físico**

**Jurados:**

Dr. Richard Haase　　　Dr. Jairo Alexis Rodríguez

Departamento de Física,
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Octubre de 2003.

.

Year still after year flows
down the Seven Rivers
cloud passes, sunlight glows
reed and willow quivers
at morn and eve, but never more
Westward ships have waded
in mortal waters as before
and their song has faded.

*The Last Ship*

Venimos de Dios, e inevitablemente los mitos que tejemos, aunque contienen errores, reflejan también un astillado fragmento de la luz verdadera, la eterna verdad de Dios.

John Ronald Reuel Tolkien, *Mythopoeia*.

.

A mi Padre, mi héroe de toda la vida, que al morir se inmortalizó en mi corazón.
A mi Madre, la razón de todo lo que soy, y toda mi razón.
A Dios, por no perderme de vista en los momentos difíciles.

Infinitas gracias a los que me llevaron por este camino de la Física: Carl Sagan por motivarme y Leonardo Castañeda por recordarme mi meta inicial.
A Carolina, mi hermana de alma, por aguantarme durante los días más difíciles.
Especialmente a Ricardo, Oscar y Mauricio, los amigos que siempre estuvieron ahí.
Mención especial a Nancy, mi editora, mi correctora de estilo, mi vigía y mi buena amiga.
A Robin, Mauro, Gabriel, Harol (que no hizo méritos para mención aparte), Gustavo, Caro y a todos los que han hecho mi vida una onza más feliz.
A mi Tía Bernarda, y a cada familiar que ha prestado su apoyo en esta causa.

*My hat to you all. It's been a pleasure.*

# Índice general

# Indice de Figuras

.

**Resumen**

Se aplica el formalismo de Raíz Cuadrada de Dirac para solventar algunos problemas físicos que presentan la ecuación de Wheeler DeWitt en diferentes modelos de minisuperespacios, en particular el modelo de Robertson Walker, el de Friedmann Robertson Walker, el de Senovilla, el de Kasner y los de Bianchi tipo I y II. Se hace una revisión de estos modelos cosmológicos y se encuentran las funciones de onda asociadas a cada minisuperespacio. Se estudia la validez y la aplicabilidad de la descomposición de Dirac en Cosmología Cuántica, y se aborda el problema de la definición del tiempo según el formalismo de Wheeler-DeWitt.

**Abstract**

The Dirac Descomposition formalism is put to the test in the context of Quantum Cosmology, to study its validity and applicability. We apply the Dirac Square Root programme to the Wheeler DeWitt equation for certain minisuperspace models, to solve some interpretation problems that come up. We study the application of this formalism to the Robertson Walker, Friedmann Robertson Walker, Kasner, Senovilla and Bianchi types I and II cosmological models. A thorough exposition of these models is shown, and the wave functions asociated with each model are found. Finally, the problem of time in Canonical Quantum Cosmology is studied and some conclusions regarding its interpretation are established.

# Introducción

La cosmología es el campo de la física que se ocupa de la evolución del universo a gran escala o *kosmos*, desde su creación hasta su fin. Los modelos que existen son modelos teóricos que son basados principalmente en la observación del universo lejano, y de los ecos de la creación; estos modelos, por tener en cuenta la masa de todo el universo, no sólo deben estar de acuerdo con las ecuaciones de campo de la Relatividad General, sino que además tienen que salir de ahí como consecuencias directas. Pero cuando miramos muy hacia atrás en el tiempo, hasta unos instantes después de la creación, comenzamos a tener problemas en la regresión temporal de nuestros modelos: de pronto tenemos que armarnos de valor y recurrimos a las herramientas que ya tenemos para describir muchos procesos que ocurren (o que podemos estudiar) en nuestro vecindario cósmico, con el fin de explicar por qué el universo es como lo vemos si fue tan distinto en sus inicios. Pero llega una escala en la cual los problemas se vuelven más graves, y es en la cual la mecánica cuántica, estando al otro lado del espectro de las teorías físicas, debe ser tenida en cuenta para hacer nuestras predicciones. De repente cualquier fluctuación cuántica del vacío, que en nuestro diario vivir no podría importar menos, puede causar que el universo no dure más que par de segundos, o que el universo siga en una expansión eterna, hasta un enfriamiento total.

Stephen Hawking comenta en un artículo de Cosmología [9] acerca de una carta que le escribieron, proveniente de un tal Instituto de Oceanografía Cuántica en Rusia. La reacción de la mayoría de los físicos que escuchan esto es una mirada de desconcierto seguida de una carcajada. Por supuesto, si es que la oceanografía está basada en la dinámica de las ecuaciones de Navier Stokes, cuya derivación es puramente clásica y tiene que ver con números muy grandes de partículas clásicas interactuando clásicamente. Los efectos cuánticos en su interacción estarían dados por la electrodinámica cuántica, pero ¿quién sería capaz de fabricar un instrumento tan sensible, o necesitar datos tan precisos, en el contexto de la oceanografía? Esto induce a preguntarse por qué la Cosmología Cuántica es menos ridícula que la oceanografía cuántica, si el universo es un sistema mucho más clásico y más grande que los océanos.

Pero como hemos dicho, ésta situación no fue así siempre; es por esta motivación que nos dedicamos a estudiar la Cosmología Cuántica (porque como humanos TENEMOS que saberlo TODO, hasta lo que jamás veremos y no tiene relevancia en nuestras vidas), en la cual intentamos conciliar la Relatividad General que funciona tan bien a escalas estelares, con la Mecánica Cuántica, que funciona muy bien a nivel atómico y más allá. Pero no es tan sencillo hacerlo como decirlo, pues, ¿cómo acoplamos un elefante con una hormiga, así logremos hacerlos del mismo tamaño? Pues esta situación es muchas veces más complicada, y sin embargo hemos dado pasos de bebé en esa dirección, tratando de descubrir los secretos de la "eterna verdad de Dios" aplicando retazos de las teorías que ya conocemos y que sabemos manejar.

Los modelos cosmológicos exitosos que han sido estudiados pueden predecir el comportamiento físico del universo hasta un poco después del tiempo de Planck, en el cual ocurre la unificación electrodébil. Pero a estas escalas de tiempo:

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5 \times 10^{-44} s$$

la energía involucrada es del orden de $10^{19}$GeV, por lo cual se deben tener en cuenta los efectos dados por la Relatividad General; además los procesos que ocurren están en la escala de la longitud de Planck:

$$l_p \sim 10^{-33} cm$$

Por lo cual tampoco podemos ignorar los efectos cuánticos [4]. Al estudiar el universo primordial, han surgido varios enfoques para abordar el problema de explicar la física del asunto; está la aproximación semiclásica, el del las GUT (*Grand Unification Theories*), el de la cuantización de la geometría, por nombrar sólo algunos. El semiclásico trata el universo a una escala *mesoscópica*, es decir, toma el límite semiclásico de cada teoría (Relatividad General y Mecánica Cuántica) y se aproxima a una unificación. Sin embargo, esta teoría está plagada de problemas de formulación, de consistencia y de interpretación; además la escala de Planck no es mesoscópica, por lo cual muchos resultados fallan en lograr su objetivo. Hawking planteó la evolución cuántica de la inflación en el contexto de teoría cuántica de campos en espacios curvos, análogo a sus trabajos anteriores sobre la radiación de Hoyos Negros. El esquema de las GUT se divide principalmente en dos caminos: el de la unificación geométrica (tipo Kaluza-Klein), que requiere dimensiones extras (y no es renormalizable) [4], y el de las supercuerdas, que ignora el carácter geométrico de la interacción gravitacional e introduce la gravedad en la forma de un campo gauge sin masa y con espín 2 [7]. Por último, está el planteamiento de la cuantización de la geometría, que busca derivar por medio de la cuantización canónica de la métrica, un análogo gravitacional a la ecuación de Schrödinger para la función de onda del universo, que gobierne los campos de materia y la geometría espaciotemporal. Esta ecuación se conoce como de Wheeler-DeWitt. A finales de los años 60 John Archibald Wheeler y Bryce DeWitt [8] decidieron probar la cuantización canónica de Dirac en la acción de Einstein-Hilbert, que es la que produce las ecuaciones de campo de la Relatividad General, y hallaron una ecuación de segundo orden en derivadas funcionales de las métricas sobre una función de onda, que en el tiempo fue conocida como *función de onda del universo*. Para derivar la ecuación de Wheeler DeWitt es necesario hacer una división de la métrica en sus coordenadas espaciales y su coordenada temporal. Esta división, conocida como de de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) o descomposición (3+1), se construye parametrizando hipersuperficies en función de un tiempo cosmológico absoluto, igual para todos los observadores sobre cada 3-variedad espacial [3]. Esta formulación hace que al cuantizar, el tiempo desaparezca y sea reemplazado por algún parámetro cosmológico, como el factor de escala del modelo de Robertson-Walker, o algún parámetro de inhomogeneidad o de anisotropía que dependan del tiempo cosmológico, pero que a su vez lo esconden de los observadores. Esto va a que lo que medimos como tiempo no es el tiempo "verdadero", sino la evolución del universo en sí mismo[1].

Sin embargo, la ecuación que obtuvieron no es soluble de ningún modo, ya que las derivadas funcionales hacen que se sume sobre todos los grados de libertad, es decir, sobre todas las métricas posibles. Sobra decir que hay infinitas métricas no catalogables e intratables según el formalismo. Por esto, Charles Misner [6] y el mismo DeWitt propusieron el enfoque de minisuperespacios[2], que dice que para nuestro universo observable existe una sola métrica que define la evolución del universo, y que es como la vemos porque estamos causalmente desconectados de la cantidad infinita de otros universos con métricas totalmente diferentes. Por lo cual la ecuación de Wheeler DeWitt generalizada viene a dar la probabilidad de que un universo cualquiera tenga una métrica específica. Cuando este universo adquiere una métrica, evoluciona sin contacto causal con otros universos, a menos que la ecuación WD[3] admita otra posibilidad. Entonces, siendo el superespacio el espacio de todos los universos posibles, cada universo en particular con su métrica asociada es un minisuperespacio, que puede seguir siendo tratado en el régimen de la Cosmología Cuántica. La posibilidad de considerar infinitos universos evolucionando paralelamente se llama de Multiuniversos, y es famosa gracias a los escritores de ciencia ficción, por más serio que sea el formalismo.
Este enfoque está muy relacionado con el principio antrópico, que afirma que el universo es tal como lo observamos porque estamos aquí para observarlo y medirlo. Por supuesto que esto está en desacuerdo con las teorías de GU[4], ya que elimina la opción determinista de elegir unas condiciones iniciales adecuadas para obtener un universo de con cierto comportamiento: gracias al carácter cuántico de la teoría, no es posible volver al inicio y predecir este mismo universo para las mismas condiciones, al igual que en mecánica cuántica con los observables. En la figura I [31] vemos un esquema de lo que serían los multiuniversos, todos evolucionando paralelamente en el superespacio a través del tiempo global, y sin contacto causal.

Sin embargo, la realidad no es tan agradable como la filosofía del asunto:

[1] Regresaremos a estas cuestiones un tanto filosóficas en el último capítulo.
[2] Sin relación alguna con Supersimetría.
[3] Wheeler DeWitt.
[4] Grand Unification.

la teoría de Wheeler DeWitt también tiene muchos problemas, como de renormalización, de positividad de la densidad de probabilidad, de conservación de probabilidad, de interpretación, etc. Como en los modelos de minisuperespacio las ecuaciones de segundo orden dependen de un número finito de parámetros, el formalismo permite hacer un análogo a la ecuación de Klein-Gordon (la ecuación de Schrödinger Relativista) en QFT[5], de modo que los problemas que presenta la ecuación de Klein-Gordon, que son de carácter similar a los que presenta la ecuación WD y que se solucionan con la ecuación de Dirac, se podrían solucionar en el contexto de la Cosmología Cuántica Canónica por medio de un análogo al formalismo de Raíz Cuadrada de Dirac, o DSR por sus siglas en inglés.
El problema principal que presenta la ecuación de Klein-Gordon, y también la ecuación de Wheeler DeWitt es que la función de onda, como queda definida, no produce una ecuación de continuidad o una ley de conservación, por lo cual a veces la densidad de probabilidad se vuelve negativa, lo que es problemático en el sentido interpretativo. Entonces lo que se hace es escoger algún modelo de minisuperespacio, hallar su ecuación de Wheeler DeWitt y hacer una factorización, de modo que se obtiene un hamiltoniano matricial actuando sobre una función de onda tipo espinor; lo que se debe hacer para obtener la verdadera forma del hamiltoniano es exigirle que al ser aplicado sobre sí mismo, se obtenga el mismo hamiltoniano de Wheeler DeWitt. Con esto se obtienen dos ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, que son mucho más faciles de solucionar, y con las cuales se puede obtener una ecuación de continuidad con sentido físico.

Uno de los problemas mas grandes que presenta la ecuación de Wheeler DeWitt es de interpretación de las condiciones de frontera en el universo, que como habíamos dicho antes tenemos que fijarlas según lo observado. Y ni aun para esto existe un consenso, ya que hasta ahora sólo existen 3 propuestas serias para fijar la forma del estado base del universo primordial: la propuesta de Vilenkin de la función de onda que se tunela o de creación de la nada, la de Hartle y Hawking de no-frontera, es decir de un universo que admite todas las configuraciones posibles de funciones de onda, y la de Linde, que difiere de la de Hartle-Hawking por un detalle técnico en la integración de todas las soluciones posibles.

En este trabajo se aplicará el formalismo DSR a cada modelo de minisuperespacio mencionado, a saber el de Robertson-Walker, el de Senovilla, el de Kasner y el de Bianchi tipo I y II. Para ésto se halla la ecuación de Wheeler DeWitt para cada modelo y se factoriza según el formalismo de Descomposición de Dirac. Después se analizarán las funciones de onda que produzca cada modelo, y su respectiva ley de conservación.
En el primer capítulo se explica el formalismo de separación ADM del espacio tiempo y su aplicación en la cuantización de la acción de Einstein Hilbert, para seguir el formalismo de Wheeler DeWitt y llegar a la ecuación de onda para el universo. Se mencionan las propuestas para fijar la condición de frontera en la

[5]Teoría Cuántica de Campos.

función de onda, que serán expuestas más explícitamente en el capítulo 3. En el capítulo 2 se hace una revisión de los modelos cosmológicos a tratar, y se estudian sus propiedades principales en el contexto de la cosmología no cuántica. En el capítulo 3 se presenta el formalismo de Wheeler DeWitt aplicado al modelo de Robertson Walker, y la descomposición de Dirac de la ecuación de Wheeler DeWitt para este modelo. Se halla la función de onda y su ley de conservación asociada, y se analizan según las condiciones de frontera adecuadas. Se hace una exposición más clara y explícita sobre las condiciones de frontera de Vilenkin, Hartle Hawking y Linde aplicadas al modelo de Friedmann Robertson Walker, teniendo en cuenta la factorización de Dirac y las soluciones que éste método produce. En el capítulo 4 se trata la cuantización del modelo cosmológico de Senovilla calculando la ecuación de Wheeler DeWitt asociada a este modelo y se muestra por qué no se puede aplicar el formalismo DSR para esa métrica. En el capítulo 5 se halla la ecuación de Wheeler DeWitt para dos parametrizaciones del modelo de Kasner. Estudiando el comportamiento cosmológico de las anisotropías en cada modelo, se analizan las soluciones obtenidas en el régimen de la probabilidad cuántica. Se explican también las precauciones que se deben tener al aplicar el formalismo en los modelos similares al de Kasner. En el capítulo 6 se aplica el formalismo (WD+DSR) a los modelos de Bianchi I y II, y se analizan las funciones de onda, la ecuación de continuidad y la evolución del modelo. Finalmente, en el capítulo 7 se hace un análisis concreto sobre los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. También se aborda el problema de la definición del tiempo en esta teoría y además las cuestiones topológicas y los problemas físicos y de interpretación que aparecen en el formalismo. En el apéndice A se tratan algunas definiciones topológicas para darle completez a ciertos aspectos más técnicos del trabajo.

.

# Capítulo 1

# Formalismo de Wheeler DeWitt

Antes de hablar del formalismo de cuantización de la gravedad, es necesario resaltar algunos aspectos necesarios para continuar con nuestra labor.

## 1.1. Dinámica Hamiltoniana

Es necesario nombrar los aspectos básicos de la dinámica Hamiltoniana, y de la cuantización canónica de sistemas discretos (grados de libertad finitos) o continuos (infinitos grados de libertad). Este método fue desarrollado principalmente por Dirac, y fue base para el desarrollo de la mecánica cuántica [1].
La acción para un sistema físico discreto, con coordenadas $q_i$, se escribe de la forma:

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L} = \int L dt$$

Con el lagrangiano (o la densidad lagrangiana) una función de las coordenadas, y sus derivadas temporales, $L = L[q_i, \dot{q}_i]$. Al hacer la variación y aplicar el principio de mínima acción, llegamos a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Y definimos los momenta conjugados a los $p_i$ de la forma:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}$$

Generalmente, se debe asumir que los momenta son funciones independientes entre sí, y que sólo dependen de las velocidades. Esto se explica diciendo que:

$$|\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}|$$

No es cero en todo el dominio de la definición. Si este no es el caso, entonces deben existir algunas restricciones, de la forma:

$$\zeta_m(q,p) = 0$$

Con $m$ un número entero. Ahora, al hacer la variación de la cantidad $p\dot{q} - \mathcal{L}$, obtenemos:

$$\delta\ (p\dot{q} - \mathcal{L}) = (\delta p)q - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q$$

Vemos que no aparecen variaciones de la velocidad, y solo hay variaciones de $p, q$. Este es el hamiltoniano, y no está expresado únicamente de la forma $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$, sino que podemos sumarle las restricciones, expresadas de la forma:

$$\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} + u^m\zeta_m$$

Los $u^m$ son coeficientes arbitrarios, y aun así la expresión anterior sigue un hamiltoniano válido. Ahora definimos los corchetes de Poisson según la forma usual:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p^i}$$

Con los cuales determinamos la dinámica del sistema, para cualquier variable canónica, en particular $g$:

$$\dot{g} = \{g, \mathcal{H}\}$$

Ahora, la cuantización de un sistema físico se hace en este esquema:

- Las variables canónicas $p_i, q_j$ se vuelven operadores hermíticos, que satisfacen el álgebra conmutativa $[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\delta^i_j$.
- Se arma una ecuación como de Schrödinger (operador hamiltoniano actuando sobre una función de onda).
- Cualquier función dinámica, se vuelve un operador hermítico.

Las restricciones, como son funciones de las variables canónicas obedecen el último paso y, según propuso Dirac, anulan la función de onda de la forma:

$$\hat{\zeta}_m\psi = 0 \quad \forall m$$

Por lo tanto cualquier procedimiento de cuantización canónica debe tener en cuenta todo lo anterior.

Como se ha dicho antes, la ecuación de Wheeler DeWitt gobierna los campos de materia y la geometría en Cosmología Cuántica, convirtiendo las ecuaciones clásicas de movimiento que aparecen en Relatividad General en ecuaciones de movimiento cuánticas. Lo que se hace es obtener una restricción hamiltoniana a partir de la geometría del espacio tiempo, y de la acción que genera por medio del formalismo de Arnowitt Deser y Misner.

## 1.2. Formalismo ADM

En principio, el espacio tiempo lo describimos por medio de una variedad 4-dimensional $\mathcal{M}$. Pero es posible descomponer esta representación haciendo que una variedad 3-dimensional $\Sigma$ sea dependiente de un parámetro real, en este caso el tiempo. Más formalmente, planteamos una relación de inmersión con una familia uniparamétrica de inmersiones [2, 3] $\mathcal{F}_t : \Sigma \to \mathcal{M}$; no existe una relación de unicidad para $\mathcal{F}_t$, en general pueden existir muchas de estas familias, o *foliaciones*. Sin embargo, la existencia de una foliación implica que hay una familia de funciones $\mathcal{F} : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, cuya forma es $(x,t) \to \mathcal{F}(x,t) =: \mathcal{F}_t(x)$ y es un difeomorfismo de $\Sigma \times \mathbb{R}$ con $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{F}$ es un difeomorfismo, tiene inversa, la cual usamos para encontrar el tiempo:

$$\mathcal{F}^{-1}(X) = (\sigma(X), \tau(X));\ \ X \in \mathcal{M}$$

$\tau(X)$ es una función global, la *función tiempo*, el cual nos puede devolver el tiempo natural que usamos como parámetro en la foliación, como $\tau(\mathcal{F}_t(x)) = t$. Lo anterior se hace con el propósito de formalizar el procedimiento que describiremos a continuación. Obviamente la definición de tiempo que hemos dado es mas bien cruda y sin mucho sentido físico, ya que como veremos más adelante, el parámetro que conocemos como tiempo no es medible. Lo que hacemos es tomar la métrica de $\mathcal{M}$ y separarla en los suficientes términos de modo que podamos definir la estructura de $\Sigma$ separando el espacio del tiempo.
Separar el espacio y el tiempo no es algo sacado de los cabellos, ya que a la hora de plantear las ecuaciones de movimiento, se requiere tomar una hoja de espacio, otra hoja de espacio un rato más tarde, y minimizar la acción en ese camino [3]. Entonces, lo que se hace es tomar una hipersuperficie de tiempo $t$ constante, y un tiempo más tarde $t + dt$ tomar otra, y ver cómo debe ser la evolución de la métrica para obtener consistencia. El esquema se observa en la Figura 1.1. Además para trabajar la formulación hamiltoniana de la gravitación es necesario hacer covariante la teoría y como ésta no lo es espacio temporalmente, trabajamos sobre $\Sigma$, en donde si se obtiene covariancia.

Figura 1.1 Descomposición (3+1)

Necesitamos cierta información para expresar correctamente la métrica. Primero, requerimos la 3-métrica de cada hipersuperficie de tiempo constante:

$$d^2 = h_{ij}(t, x, y, z)dx^i dx^j \tag{1.1}$$

Con $d^2$ la distancia entre dos puntos medida sobre la hipersuperficie. También necesitamos la métrica para $t + dt$, $h_{ij}(t + dt, x, y, z)dx^i dx^j$. Como el tiempo cosmológico no es el que medimos directamente, debe haber una relacón entre éste y el tiempo propio en cada punto de $\Sigma$:

$$d\tau = N(t, x, y, z)dt \tag{1.2}$$

$N$ es conocida como función lapso, y relaciona el paso del tiempo de cualquier observador con el tiempo cosmológico. Finalmente, necesitamos saber si ocurre un cambio en la posición de un punto por la evolución temporal, esto es:

$$x^i_{arriba} = x^i_{abajo} - N^i(t, x, y, z)dt \tag{1.3}$$

$N^i$ es conocido como vector de corrimiento (*shift*). Ahora escribimos el invariante $ds^2$ en su forma más lógica:

$$ds^2 = (\text{DistanciaPropia(Abajo)})^2 - (\text{TiempoPropio(Abajo} - \text{Arriba)})^2$$

Y sustituimos (1.1), (1.2), (1.3):

$$ds^2 = -(Ndt^2) + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{1.4}$$

Esta es la forma ADM[1] de cualquier métrica[2]. Matricialmente, queda escrita como:

$$g_{\alpha\beta} =: \begin{pmatrix} N_i N^i - N^2 & N_k \\ N_k & h_{ij} \end{pmatrix}$$

Y el elemento de volumen inavariante queda de la forma:

$$(-g)^{1/2} dtdxdydz = N(h)^{-1/2} dtdxdydz$$

Ahora, según este formalismo, podemos escribir el escalar de curvatura de una forma más conveniente con la ayuda de la curvatura extrínseca. La curvatura extrínseca mide la deformación de alguna estructura que está sobre la hipersuperficie, cuando evoluciona en el tiempo dentro de $\mathcal{M}$ [3, 4].

En la figura 1.2 vemos un esquema para explicar el concepto de curvatura extrínseca. Tomamos la normal $\mathbf{n}$ en el punto $P$ que está sobre la hipersuperficie de tiempo constante, lo trasladamos paralelamente a sí mismo hasta el punto $P + \delta P$, y hallamos la diferencia entre este vector y el vector normal del punto $P + \delta P$. La diferencia $\delta\mathbf{n}$ depende linealmente de la distancia $\delta P$, y están relacionados por la curvatura extrínseca, que es un tensor:

$$\delta\mathbf{n} = -\mathbf{K}(\delta\mathbf{P})$$

Es posible hacer un recuento más riguroso, apelando a las 1-formas [3], pero en este trabajo no es necesario para dar la idea de $K$. Si la hipersuperficie no está inmersa en un superespacio, el concepto de curvatura extrínseca no tiene sentido, ya que sólo se refiere al cambio en la forma de la variedad en su evolución. En nuestro caso particular (Figura 1.2) la curvatura es positiva; si la 3-variedad fuera cóncava hacia abajo, $K$ sería negativa.

Figura 1.2 Curvatura extrínseca.

En [3] encontramos una derivación rigurosa de la forma explícita de la curvatura extrínseca por medio de la geometrodinámica (geometría diferencial para físicos), en términos del lapso, el *shift* y la 3-métrica:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\right) \tag{1.5}$$

[1] Arnowitt Deser Misner

[2] La signatura con la cual se trabajará es (-,+,+,+).

La raya vertical indica derivación covariante sobre $\Sigma$. En la mayoría de los modelos cosmológicos, y en particular en todos los estudiados aquí el vector *shift* se desvanece, y la forma de la curvatura extrínseca queda:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \qquad K^{ij} = h^{il}h^{mj}K_{lm}$$

$$K_i^j = h^{jl}K_{il}$$

Y no, por ejemplo $K^{ij} = -\frac{1}{2N}\frac{\partial h^{ij}}{\partial t}$; para hallar las demás componentes es necesario operar con los índices. Igualmente es posible demostrar que el escalar de curvatura se redefine en términos de la curvatura extrínseca:

$$\mathbf{R} = K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3\mathbf{R} \tag{1.6}$$

Con $K = Tr[K_{ij}] = h^{ij}K_{ij}$, y ${}^3\mathbf{R}$ el escalar de curvatura en tres dimensiones, que describe la curvatura de la métrica[3] sólo en términos de derivadas espaciales de la 3-métrica. Veremos que esta forma de escribir el escalar de curvatura es muy útil en la formulación canónica.

## 1.3. Acción de Einstein Hilbert

Cualquier métrica se puede escribir de la forma (3+1), si bien no cualquier variedad permite tal descomposición; ésta formulación es útil para expresar el escalar de curvatura en términos de variables canónicas, como $N$, $N^i$ y $h_{ij}$ y sus momentos conjugados. En la mayoría de los casos estudiados el escalar de curvatura depende de variaciones temporales de la 3-métrica y del escalar de curvatura en 3 dimensiones.
La acción de Einstein-Hilbert es la acción que produce las ecuaciones de campo de la Relatividad General:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

En unidades naturales[4]. Las cantidades $R$ nos dicen qué tan pronunciados son los cambios de la métrica sobre las coordenadas, y $T$ se refiere a la distribución de materia que causa la distorsión en el espacio-tiempo.
Ahora, esta acción depende del escalar de curvatura $R$:

$$S_{E-H} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\mathbf{R}$$

Entonces, tendríamos un lagrangiano de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}\mathbf{R}}{16\pi G}$$

[3]La curvatura se refiere a qué tan abruptos son los cambios espaciales de la métrica sobre la hipersuperficie de tiempo constante.
[4]En todo el trabajo se tomará la convención $c = \hbar = 1$.

La forma de este lagrangiano es motivada por construir un invariante que contenga sólo segundas derivadas lineales del tensor métrico, que no contenga derivadas de más orden y que en espacio tiempo plano se anule. Esto, precisamente para obtener el comportamiento que observamos en las ecuaciones de campo . El escalar de curvatura es una cantidad que cumple estas condiciones, por lo cual llevará a cabo el trabajo. Y para obtener invarianza en la integración, debemos construir el 4-volumen invariante que veíamos en la sección anterior:

$$dV = \sqrt{-g}d^4x$$

Pero si tenemos una variedad en cuya superficie no se desvanecen las derivadas normales, el escalar de curvatura da cuenta de un término de superficie, que suma a la acción de Einstein Hilbert:

$$S = S_{E-H} + \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} d^3x\sqrt{h}2K$$

Este término da cuenta de la superficie de la variedad. Muchos modelos cosmológicos, como en particular el de Robertson Walker, admiten métricas abiertas, es decir con una topología hiperbólica que da pie a que este término de superficie no se desvanezca en el infinito, y de términos infinitos *no renormalizables* a la hora de cuantizar el sistema. Es por esto que es preferible trabajar sólo con modelos cerrados (es decir, sin términos de superficie). Nos podemos permitir hacer esto, pues la información que necesitamos la podemos restringir a modelos con sentido observacional.
Podemos tener en cuenta la constante cosmológica en la acción de Einstein Hilbert, sumándo el término:

$$-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x(2\Lambda)$$

a la acción. Al hacer esto aparece la constante cosmológica en las ecuaciones de campo, de la forma usual:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

## 1.4. Ecuación de Wheeler DeWitt

Según lo anterior, el lagrangiano que tenemos es:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}\mathbf{R}}{16\pi G}$$

Y al hacer la descomposición (3+1) lo obtenemos en términos de la curvatura extrínseca:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{h}N(K^2 - K_{ij}K^{ij} - {}^3\mathbf{R})$$

Gracias a la forma de la expresión para la curvatura extrínseca (1.5), vemos que el lagrangiano no depende de derivadas temporales de $N$ o de $N^i$, por lo cual:

$$\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}^i} = 0$$

Es decir, $N$ y $N^i$ no son variables dinámicas y sus momentos conjugados son cero.
Por otra parte, el momento conjugado a $h_{ij}$ vale:

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}} \left( \frac{-\sqrt{h}N}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})K_{ij} + \frac{\sqrt{h}N\,{}^3\mathbf{R}}{16\pi G} \right)$$

Pero ${}^3\mathbf{R}$ contiene sólo términos de $h_{ij|k}$, por lo cual:

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ij}} \left( \frac{-\sqrt{h}}{32\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})\dot{h}_{ij} \right)$$

$$\rightsquigarrow \pi^{ij} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})$$

Ya habiendo calculado el momento conjugado a las 3-métricas, podemos encontrar el hamiltoniano, que está definido como:

$$\mathcal{H} = \pi_{ij}\dot{h}^{ij} - \mathcal{L}$$

Y sustituyendo $\pi_{ij}$, llegamos a:

$$\mathcal{H} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})\dot{h}_{ij} + N\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K^2 - K_{ij}K^{ij} - {}^3\mathbf{R})$$

$$\mathcal{H} = \frac{-2\sqrt{h}N}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})\frac{1}{2N}\left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})(N_{i|j} + N_{j|i}) + N\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K^2 - K_{ij}K^{ij} - {}^3\mathbf{R})$$

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}_G + \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(Kh^{ij} - K^{ij})(N_{i|j} + N_{j|i})$$

La segunda parte del lado derecho de la ecuación anterior no depende explícitamente de la función lapso. Es por esto y porque la restricción $\pi_N = 0$ se mantiene en el tiempo, que tenemos:

$$\mathcal{H}_G = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta N} = -\{\mathcal{H}, N\} = \dot{\pi}_N = 0$$

Esta es la restricción hamiltoniana que estábamos buscando, y que además explica el hecho que $N, \pi_N$ no cumplan la misma álgebra que aparece en la cuantización por conmutadores[5]. Ahora podemos expresar $\mathcal{H}_G$ en una forma más decente:

$$\mathcal{H}_G = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}(K_{ij} - Kh_{ij})K^{ij} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^3\mathbf{R}$$

[5] Pasa de igual forma para $N^i$, cuando aparece la restricción de moméntum en la segunda parte del hamiltoniano total.

$$= -\pi_{ij}(K_{ij} - Kh_{ij})\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\frac{16\pi G}{\sqrt{h}} - \pi_{ij}Kh^{i}j - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^{3}\mathbf{R}$$

$$= \pi_{ij}\pi^{ij}\frac{16\pi G}{\sqrt{h}} - \pi_{ij}h^{ij}\frac{16\pi G}{2\sqrt{h}}\pi_{kl}h^{kl} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^{3}\mathbf{R}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi^{j}_{l}\pi^{l}_{j} + \pi^{j}_{k}\pi^{k}_{j})\frac{16\pi G}{\sqrt{h}} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^{3}\mathbf{R}$$

Manipulando los índices un poco, obtenemos:

$$\mathcal{H}_G = \frac{16\pi G}{2\sqrt{h}}(h^{jk}h^{il} + h^{jl}h^{ik})\pi_{ij}\pi_{kl} - \frac{16\pi G}{2\sqrt{h}}(h^{ij}h^{kl})\pi_{ij}\pi_{kl} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^{3}\mathbf{R}$$

Y, finalmente llegamos a la restricción:

$$16\pi G\, G^{ijkl}\pi_{ij}\pi_{kl} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^{3}\mathbf{R} = 0 \tag{1.7}$$

Con $G^{ijkl}$ la métrica del superespacio $\mathcal{M}$ [2, 4, 5]:

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h^{jk}h^{il} + h^{jl}h^{ik} - h^{ij}h^{kl})$$

Vemos que, como habíamos dicho antes, $\mathcal{H}_G$ es independiente de $N$ y de $N^i$, por lo que la única variable dinámica presente es $h_{ij}$. La evolución de la forma del espacio tiempo está dada por (1.7), la cual está definida exclusivamente por los parámetros de $h_{ij}$. La otra parte del hamiltoniano produce la llamada *restricción de moméntum* $\pi^{ij}_{|j}$, que no es importante para el desarrollo por ser un dato adicional ya contenido en el formalismo [4, 5, 6]. Una justificación para la existencia de estas restricciones la obtenemos al tener que para especificar la métrica en un punto sobre la hipersuperficie de tiempo constante, necesitamos 6 valores. Pero sólo requerimos dos grados de libertad (métrica + moméntum conjugado), entonces el papel de estas restricciones es reducir el número de grados de libertad a los dos que requerimos.
Pero hasta ahora todo lo que hemos hecho es estrictamente clásico, por lo que para entrar en el régimen cuántico vamos a extender la restricción (1.7) de modo que hacemos que el hamiltoniano actúe sobre una función de onda cuántica, y cuantizando según el formalismo de corchetes de Dirac sobre las variables conjugadas $\pi_{ij}$, de la forma:

$$\pi_{ij} \rightarrow -i\frac{1}{(16\pi G)^{3/2}}\frac{\delta}{\delta h^{ij}}$$

Vemos que la derivada es funcional, ya que $h_{ij}$ está definida por distintos parámetros, y en general no es única como se verá más adelante. El álgebra de conmutadores que satisfacen estas cantidades es:

$$[\hat{h}_{ij}, \hat{\pi_{ij}}] = i$$

Ahora las variables canónicas se han vuelto operadores. Este procedimiento de cuantización canónica lleva a la mundialmente famosa ecuación de Wheeler DeWitt [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9]:

$$\left(\frac{1}{(16\pi G)^2}G^{ijkl}\frac{\delta}{\delta h^{ij}}\frac{\delta}{\delta h^{kl}} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\,{}^3\mathbf{R}\right)\psi[h_{ij}] = 0 \tag{1.8}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación de Scrödinger (es de segundo orden en derivadas funcionales), con la diferencia que (1.8) define el estado cuántico del universo a *energía cero*. Es posible elevar el potencial al cual está sometido el universo por medio de la constante cosmológica, recordando que en la acción de Einstein Hilbert la constante cosmológica entra sumada al escalar de curvatura:

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}(\mathbf{R} + 2\Lambda)$$

Por lo cual el lagrangiano se modifica de la forma $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{2\sqrt{h}\Lambda}{16\pi G}$, y la ecuación de Wheeler DeWitt queda:

$$\left(\frac{G^{ijkl}}{16\pi G}\frac{\delta}{\delta h^{ij}}\frac{\delta}{\delta h^{kl}} - \sqrt{h}({}^3\mathbf{R} - 2\Lambda)\right)\psi[h_{ij}] = 0$$

Por lo cual el potencial que en principio está representado por ${}^3\mathbf{R}$ es alterado por la constante cosmológica. Notamos que a menos que $\sqrt{h} = cte$, la constante cosmológica no puede representar la energía del universo, es decir en general la energía del universo es cero.

La ecuación de Wheeler DeWitt en su forma más general es imposible de solucionar, debido a que tiene un número infinito de grados de libertad (todas las métricas); por esta razón es que resulta más conveniente trabajar con los modelos de minisuperespacio [1, 5, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Los modelos de minisuperespacio se basan en ignorar los infinitos grados de libertad que tiene la ecuación de Wheeler DeWitt[6], y escoger sólo un modelo de métrica cosmológica. El planteamiento supone que con respecto a un posible modelo, los otras posibilidades de evolución no interfieren, y es como si se "congelaran" los otros grados de libertad y se hace el tratamiento físico a un solo modelo en particular. Es por esto que es necesario buscar modelos cosmológicos que funcionen en el universo actual, o al menos tengan sentido físico, para aplicar el formalismo de Wheeler DeWitt. Los modelos cosmológicos que existen dependen de un número finito de parámetros, por lo cual se puede aplicar el mismo formalismo de Wheeler DeWitt de hallar el hamiltoniano y cuantizar sobre los grados de libertad, en estos casos los parámetros cosmológicos. Como se dijo en la introducción el enfoque de muchos universos con diferentes métricas evolucionando paralelamente y sin contacto causal (a menos que en su historia diga lo contrario) se llama de Multiuniversos.

[6]El espacio de solución de la ecuación de Wheeler DeWitt es conocido como superespacio.

A manera de comentario al margen, mencionamos que el verdadero problema de una teoría de todo (según este formalismo) requiere una métrica universal, que según el principio antrópico sería posible encontrarla únicamente por observación directa, por lo cual los modelos cosmológicos sólo describen una clase de universos que bien podrían ser como el nuestro, o muy similares. Asimismo, las condiciones de frontera que se estudian deben estar de acuerdo con los principios físicos que observamos, pero no porque no sean una posibilidad, sino porque jamás podríamos averiguar su validez. Hemos mencionado el principio antrópico, dado que por el carácter cuántico de este formalismo, lo que éste produzca es sólo explicable después de que ocurra, es decir el universo que veamos es el universo que se da por la probabilidad cuántica, no por predicción previa.

## 1.5. Problemas del Formalismo y la Descomposición de Dirac

No sería muy honesto vender algo sin dar un par de advertencias acerca del producto, por lo cual mencionaremos algunos de los problemas relacionados con la interpretación cuántica del formalismo de Wheeler DeWitt, enumerados por Isham [2]. Su tratamiento *está fuera del alcance de este trabajo.*
Por ejemplo, ¿hasta qué punto es conveniente mantener el álgebra de los corchetes de Poisson en esta teoría? Dado que la restricción hamiltoniana que obtenemos tiene términos no lineales de las variables canónicas, inevitablemente aparecerán problemas de renormalización, ordenamiento de los operadores[7], y anomalías. Este problema ha sido reportado desde siempre a la hora de trabajar en gravedad cuántica, ya que desde su formulación la Relatividad General es una teoría altamente no lineal, por lo cual al tratar de cuantizar siempre aparecen problemas de renormalización, en principio inevitables, como infinitos multiplicando cantidades esenciales.
Otro problema de interpretación es el de la hermiticidad de los operadores, que si bien es excusable debido al desconocimiento del comportamiento del universo primordial, ha sido tratado de distintas maneras. Según el enfoque cuántico, es natural exigirle hermiticidad a los operadores[8], pero el debate no ha terminado, ya que por ejemplo Kuchar [2] ha justificado el uso de operadores no hermíticos haciendo notar que el espacio de Hilbert en el cual se halla la representación del álgebra canónica no es el mismo espacio de Hilbert en donde se imponen las condiciones físicas sobre los estados que satisfacen las restricciones. Un problema aun mayor es encontrar la relación entre estos dos espacios, y el tratamiento matemático que se debe dar a cada uno. Los hamiltonianos de Wheeler DeWitt obtenidos para los distintos modelos cosmológicos son hermíticos sin necesidad de imponerlo; sin embargo en este trabajo se exigirá hermiticidad a los hamil-

[7]Como en la mayoría de reportes de Cosmología Cuántica Canónica (CQC), en este trabajo el ordenamiento de los operadores es dejado a conveniencia del investigador, pues este problema aun está abierto.

[8]Hawking presenta una sencilla pero convincente exposición sobre la hermiticidad del hamiltoniano de Wheeler DeWitt.

tonianos obtenidos en el régimen DSR (descomposición de Dirac), con el fin de asegurar la obtención de una ecuación de conservación bien definida.

Otro de los problemas enunciados por Isham, había sido analizado en una discusión interdisciplinaria en una pre-exposición de este trabajo: ¿cuál es el rol de los observables dentro de esa teoría? Ya que uno podría postular que un operador $A$ es un observable, si cumple:

$$[A, H] = 0$$

Según la interpretación no relativista. Pero también sería conveniente hacer que esa relación fuera aplicada sobre la restricción hamiltoniana $\mathcal{H}_N$, o sobre la restricción de moméntum $\mathcal{H}_\pi$. La discusión respecto a este punto tampoco ha terminado, y por ser de poca relevancia en la aplicación en este trabajo, no se volverá a mencionar.
Los modelos de minisuperespacio producen resultados con problemas un poco más terrenales, aunque no menos graves, como la falta de una ecuación de conservación bien definida, la no positividad de la densidad de probabilidad $\rho(\psi)$, o la no integrabilidad de la función de onda (que conlleva a la no conservación global de la probabilidad). Estos problemas recuerdan los que presenta la ecuación de Klein Gordon en Teoría Cuántica de Campos [17], y que se solucionan al aplicar la descomposición de Dirac, o formalismo de la raíz cuadrada de Dirac (*Dirac Square Root, DSR*) sobre el hamiltoniano de Klein Gordon. Lo que se hace es escoger un hamiltoniano matricial que actúe sobre una función de onda tipo espinor, y que a su vez pueda producir de nuevo la ecuación original. Entonces, si la ecuación de Klein Gordon está escrita de la forma:

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{1.9}$$

Una ecuación matricial escrita de la siguiente forma:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\underline{\phi} \tag{1.10}$$

Debe cumplir:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m) = \Box + m^2$$

para que haya consistencia entre ellas. Con esto, uno halla condiciones para las matrices $\gamma$. Además, la forma en que uno construye esta nueva ecuación permite obtener una ecuación de conservación de densidad de probabilidad, y en adición puede asegurar la positividad de esta densidad [17].
En los modelos de minisuperespacio uno tiene que lidiar con ese tipo de problemas, ya que a fin de cuentas se obtienen ecuaciones diferenciales de segundo orden, cuyas funciones de onda asociadas presentan los problemas anteriormente mencionados. En los capítulos siguientes se explicará este procedimiento de una forma más explícita y más puntual.

Finalmente, tenemos el problema del tiempo, ya que no aparece por ninguna parte. ¿Eso quiere decir que en QC[9] no pasa nada? La respuesta, que parece ser

[9] Cosmología Cuántica

un consenso casi general, es NO. Lo que pasa es que el formalismo está construido de tal modo que el tiempo no es medible directamente, sino a través de la evolución de los parámetros cosmológicos. Entonces lo que nosotros llamamos la evolución "temporal" del modelo es el cambio de cada hoja de espacio en función de los parámetros cosmológicos, que a su vez dependen del tiempo absoluto. Pero el tiempo absoluto no es medible, ya que lo que nosotros llamamos tiempo es nuestro tiempo propio, que si bien lo podemos relacionar con el cosmológico por medio de la función lapso y cuya evolución depende de los parámetros cosmológicos, también lo podemos reescalar para obtener los resultados observables actualmente. Volveremos a este punto en el último capítulo de este trabajo.

## 1.6. Condiciones de Frontera

Cuando uno habla de condiciones de frontera en mecánica cuántica, se refiere a las condiciones que el exterior ejerce sobre el sistema físico. Pero en el caso cosmológico no hay nada externo al universo (no que sepamos); por lo cual se ha propuesto que la fijación de la condición de frontera tiene que estar dada por alguna ley física independiente, por la observación y en menor medida por el principio antrópico. Existen hasta el momento tres propuestas serias sobre la condición de frontera del universo: la de Vilenkin, la de Hartle y Hawking, y la de Linde que es una variación de la de Hartle-Hawking [5, 16, 18].
El consenso general dice que debemos encontrar la función de onda del universo por medio de una integración sobre todas las posibles trayectorias (o historias, según Hawking). A partir de aquí, es posible fijar las condiciones de frontera dependiendo de la forma de la integración.
La integral de camino de Vilenkin propone una creación de la nada, es decir, integra sobre todos los caminos desde una 3-geometría vacía hasta otra $g$ con una configuración de campo escalar $\phi$ [16]:

$$\psi_V(g) = \int_{\emptyset}^{(g,\phi)} e^{iS}$$

Los caminos posibles son representados por geometrías Lorentzianas acotadas por la geometría $g$. Esta función de onda impone una condición de frontera en el superespacio, ya que sólo permite las funciones de onda que sólo incluyen ondas salientes en la frontera.
La función de onda de Hartle-Hawking se expresa como la suma sobre geometrías Euclideanas acotadas por la 3-métrica $g$ [5, 18]:

$$\psi_{HH}(g) = \int^{(g,\phi)} e^{-S_E}$$

$S_E$ es la acción Euclideana asociada a cada geometría. Se ha hecho una rotación del eje temporal ($t \to -i\tau$), lo que generalmente ayuda en QFT[10] [17], pero que

[10]Teoría Cuántica de Campos.

en Gravedad Cuántica genera problemas, ya que la integral de Hartle Hawking no está acotada en su límite inferior, por lo cual diverge. No ha sido posible renormalizar esta integral, por lo que la propuesta se reduce a tomar puntos estacionarios de la acción, o instantones: $\psi \sim e^{-S}$. Las consecuencias de esto serán más claras al estudiar el modelo de Robertson-Walker. Además de esto, la condición que se fija es que la función de onda debe crecer con el sentido del tiempo (representado por $\sqrt{h}$) en el régimen de barrera de potencial, y cualquier componente que se comporte de otra manera se debe anular.
Linde propone una integral de camino como la de Hartle Hawking, pero con el eje temporal rotado al contrario, esto es $t \rightarrow +i\tau$. Con esto, la integral queda [16]:

$$\psi_L(g) = \int^{(g,\phi)} e^{+S_E}$$

Y el problema se encuentra en el límite superior de la integral, que hace que ésta diverja. El problema es mayor, ya que las integraciones sobre los campos escalares y la 3-geometría van a diverger. También se analiza tomando los instantones y viendo su comportamiento cerca de la frontera; además la condición se fija al contrario que la de Hawking: en el régimen acotado la función de onda debe decrecer con el sentido de $\sqrt{h}$. En el capítulo 3 se explicará más en detalle cada condición de frontera y la forma de la función de onda que produce, ya que como se dijo antes, el el superespacio no se pueden obtener resultados directos.

# Capítulo 2

# Modelos Cosmológicos

En cosmología se busca explicar el comportamiento del universo como un todo, sin tomar casos locales como hoyos negros, o galaxias o partículas de prueba alrededor de objetos pesados. Esto es gracias a que el universo como lo conocemos es, a gran escala, homogéneo e isotrópico. Lo anterior no significa que el universo sea plano: de hecho el campo de trabajo de la cosmología se basa en el estudio de los modelos que pueden predecir un universo más o menos como lo observamos actualmente. El modelo que mejor predice un universo de esta forma es el Modelo Estándar de la Cosmología, que es el modelo inflacionario que presentan los divulgadores. Sin embargo, como lo que se busca es la evolución de los modelos, nada nos dice que el universo no fue altamente anisotrópico e inhomogéneo al principio de los tiempos, y que luego fue "alisándose"hasta tomar su aspecto actual.

Como se dijo en la introducción, la Cosmología Cuántica se ocupa del estudio de las condiciones del universo primordial: es por esto que en este trabajo se estudiaron distintos modelos de universo que hasta cierto punto pueden predecir ciertas condiciones que observamos en el universo actual. Sin embargo, cabe hacer una advertencia: los modelos aquí estudiados son modelos de juguete (*Toy Models*) que no pueden explicar la existencia de estructuras a un nivel tan macroscópico como las galaxias, y que muestran a grandes rasgos sólo algunas de las propiedades del universo.

Antes de pasar a los aspectos técnicos de las métricas asociadas a cada modelo, es conveniente enumerarlas y mencionar algunos de sus aspectos más importantes.

La métrica de Robertson-Walker predice un universo maximalmente simétrico con simetría radial y en expansión [19]. Este modelo se puede extender para tener en cuenta las contribuciones de las diferentes clases de materia y también los efectos de la constante cosmológica. Cuando se hace esta extensión el modelo se llama de Friedmann-Robertson-Walker, y los efectos aparecen al solucionar para las ecuaciones de campo. Senovilla [20] propuso en 1990 un modelo de universo inhomogéneo con una ecuación de estado termodinámica real, que generalizaba un resultado similar de Feinstein y Senovilla [21] de 1989. Lo realmente interesante de este modelo es la ausencia de una singularidad inicial que explique el origen de universo; sin embargo esta condición no elimina la posibilidad de un Big Bang, como veremos más adelante. El modelo de Kasner [3, 13, 22, 23] es un modelo simple para un universo primordial con anisotropías; cuando este modelo se toma dinámico, presenta una evolución temporal que arroja unos resultados interesantes [3, 6, 13] a pesar de que el modelo es muy susceptible a producir errores en la descomposición (3+1). La métrica asociada a este modelo tiene una forma poco conveniente para hacer cálculos, por lo que se tomaron dos parametrizaciones: la de Khalatnikov-Lifchitz [3, 6] y la de un trabajo de Sibjorn Hervik [13]. Los modelos de Bianchi [1, 6, 11, 24, 25] no fueron desarrollados directamente por él, de hecho lo que hizo fue enumerar los grupos de simetría que darían las bases para el estudio de esos modelos. Las métricas de Bianchi modelan un universo en expansión que tiene anisotropías; gracias a que estas métricas aparecen a partir de consideraciones de simetría, los resultados que se obtienen son relativamente fáciles de analizar.

## 2.1. Métrica de Robertson Walker

El principio cosmológico establece que cada una de las variedades espaciales que salen de la descomposición (3+1) debe ser homogénea e isotrópica, lo que hace que la variedad sea maximalmente simétrica. Se puede demostrar [19] que el elemento de línea de una variedad homogénea e isotrópica es:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega$$

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Este, por supuesto es el elemento de línea tridimensional. $k$ caracteriza el modelo que se tome, ya que está relacionada con el escalar de curvatura por medio de $6k = \mathbf{R}$, por lo cual el modelo será cerrado, abierto o plano si $k$=+1, -1 o 0, correspondiente a una geometría esférica, hiperbólica o euclídea[1] [26]. En la figura 2.1 está una figura esquemática en la cual podemos ver la diferencia entre los 3 diferentes modelos, y cómo afecta la medición de las geodésicas.
Ahora, para escribir el elemento de línea de la variedad en la cual están inmersas todas las 3-variedades apelamos a un resultado [19] que dice que en este caso es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual la métrica de la variedad espacio temporal es:

$$ds^2 = g_{00}(t)dt^2 + f(t)dl^2$$

Podemos escalar $t$ de modo que $g_{00} = -1$ siempre, y para forzar la signatura (-,+,+,+), hacemos que la función $f(t)$ sea siempre positiva, esto es $f(t) = R^2(t)$. El resultado que aparece es la métrica de Robertson Walker en su forma usual:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega\Big) \tag{2.1}$$

[1] Esos valores se obtienen después de reescalar $r$.

Como mencionamos en el capítulo anterior, para evitar infinitos debidos a términos de superficie indeseados requerimos que el modelo sea cerrado, por lo cual únicamente trabajaremos con el caso $k = 1$.
Finalmente, es conveniente escribir $r \to \sin\xi$, para que la métrica describa la forma de una 4-esfera [4, 19]:

$$r = \sin\xi \qquad dr = \cos\xi d\xi$$

$$\frac{dr^2}{1-r^2} = \frac{d\xi^2\cos^2\xi}{1-\sin^2\xi} = d\xi^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\Big(d\xi^2 + \sin^2\xi d\Omega\Big) \tag{2.2}$$

$R$ es conocido como *factor de escala*, y determina el tamaño del universo en función del tiempo. Dependiendo de la distribución de materia, la evolución temporal de $R$ se puede hallar a partir de la ecuaciones de campo de Einstein.

### 2.1.1. Modelo de Friedmann

Cuando sustituimos la métrica de Robertson Walker en las ecuaciones de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Y escribimos el tensor de momento energía de modo que tenga en cuenta la materia con la forma de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

Tenemos las siguientes ecuaciones [4, 19]:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{2.3}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = -8\pi G p$$

La primera de estas ecuaciones es conocida como la ecuación de Friedmann. Restando estas dos ecuaciones llegamos a:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

Esta ecuación la podemos analizar para ver cómo se comporta el universo dependiendo de la forma de la materia en su interior. Para la materia común, $\rho + 3p \geq 0$ por lo cual el factor de escala estaría en deceleración. Además. como lo que observamos actualmente es expansión ($\dot{R} \geq 0$), tenemos que en algún $t$ el factor de escala fue cero. Podemos reescalar y decir que $R(t=0) = 0$; este momento lo asociamos con la creación del universo, un momento en el cual todos los puntos del universo actual estuvieron pegados.

Ahora podemos tener en cuenta la constante cosmológica, recordando del capítulo anterior la expresión para la acción de Einstein Hilbert; de ahí llegamos a la siguiente expresión para el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}(\mathbf{R} + 2\Lambda)$$

Tomamos la ecuación de Friedmann para $\rho = \frac{1}{8\pi G}\Lambda$, esto es, la única forma de energía que contribuye es la del vacío, representada por la constante cosmológica:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{\Lambda}{3}$$

El modelo FRW[2] presenta muchos problemas que deben ser tenidos en cuenta cuando se quiere trabajar a escalas de la energía de Planck [4, 19], por ejemplo, para la formación de las estructuras que observamos ahora (galaxias) este modelo no provee información acerca de las perturbaciones primordiales que dieron lugar a ésta. Además los monopolos (cuya masa sería 16 órdenes de magnitud mayor que la masa del protón) y demás defectos topológicos (paredes de dominio, cuerdas cósmicas) que se supone fueron creados cerca del tiempo de Planck no alcanzan a dispersarse, y harían que el universo colapse en 30000 años. Aparte de los problemas anteriormente mencionados existen otros más básicos y por consiguiente más de formulación, que hasta el momento han sido intratables[3]. Otro problema es que la costante cosmológica debida a fluctuaciones cuánticas se calcula del orden de $10^{70}$seg$^{-1}$, valor que diverge del medido por un factor de $10^{120}$, lo cual es inadmisible.
Sin embargo, la solución a los problemas que se mencionaron anteriormente se puede obtener por medio del Mecanismo de Inflación, propuesto por Guth en 1981 y que junto con el modelo FRW conforman el Modelo Estándar de la Cosmología [19].

### 2.1.2. Mecanismo de Inflación

El mecanismo que se busca debe hacer que momentos después del Big Bang el universo pase por una transición de fase que haga que la energía del vacío domine y por consiguiente que el factor de escala crezca exponencialmente durante cierto tiempo y en cierta región, para luego seguir la expansión que predice el modelo FRW hasta el universo actual.
Esto se consigue insertando en el modelo un campo escalar (cuántico) asociado al campo de Higgs, que se coloca en la forma de una modificación al lagrangiano [4, 19, 27]:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi)$$

La forma de $V$ depende de la conveniencia del que está trabajando; hasta el momento no hay un consenso sobre la forma exacta que debe tener.Recordamos

[2]Friedmann-Robertson-Walker.

[3]Por ejemplo está el problema de la asimetría materia-antimateria, que no se ha podido explicar de ninguna manera.

de teoría de campos la forma de calcular el tensor momento energía en base al lagrangiano, y despues de algo de álgebra llegamos a:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_\phi + p_\phi)u^\mu u^\nu + p_\phi g^{\mu\nu}$$
$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi} + V(\phi)$$
$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi} - V(\phi)$$

Esto se sustituye en la ecuación de conservación del momento-energía $T^{\mu\nu}_{;\mu}$ para obtener la ecuación clásica de movimiento de $\phi$ [4]:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{\phi} + \Gamma_\phi\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

El segundo término expresa el corrimiento al rojo de $\dot{\phi}$ debido a la expansión del universo.
El tercer término no se obtiene de la ecuación de conservación; en cambio se obtiene a partir de consideraciones de decaimiento de las partículas $\phi$ en partículas más ligeras. Este efecto causa un amortiguamiento de las oscilaciones de $\phi$ alrededor del mínimo de potencial, que a su vez es causa del recalentamiento del universo. Entonces, la ecuación de movimiento que obtenemos tiene dos regímenes: dominado por la fricción y de oscilaciones rápidas. Podemos ver en las figuras 2.2 y 2.3 los distintos regímenes, en donde se observa que respecto al segundo régimen, el primero es aproximadamente constante. La forma del potencial graficado es:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^2(\phi - \phi_0)^2 - \frac{\lambda}{2}\epsilon\phi_0\phi^3$$

Que como se ha dicho, no constituye una forma exacta del potencial primordial; es sólo un modelo aproximado que permite explicar la inflación.
En el régimen dominado por la fricción ignoramos el término de aceleración y el de $\Gamma_\phi$ (todavía no actúa) y la ecuación de movimiento se reduce a:

$$3\dot{R}\dot{\phi} = -V'(\phi)R$$

Ahora, para ignorar legítimente a $\ddot{\phi}$ es necesario hacer un balance para $V''(\phi)$ [4]:

$$V''(\phi) \ll 9\dot{R}/R \simeq 24\pi V(\phi)/m_{Pl}^2$$

Con esta condición tenemos:

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}V(\phi)}\,R$$

Ahora asumimos que $V$ toma un valor constante ($V_0$) durante esta etapa[4] y resolvemos para $R$:

$$R(t) \sim e^{\sqrt{\frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}V_0}\,t} = e^{\lambda t} \tag{2.4}$$

[4]O al menos su variación es muy pequeña (Figura 2.3).

Con este resultado podemos resolver un par de problemas; por ejemplo para el de formación de estructuras ya tenemos una base sólida para explicar el mecanismo de Jeans [4]: durante la expansión hubo un momento en el cual la materia alcanzó el horizonte de eventos y las ondas de choque generaron la aglomeración de materia en las esctructuras que luego dieron paso a las galaxias. Tambien podemos ver que en la ecuación de Friedmann (2.3), mientras la densidad del campo escalar permanece constante, $R$ aumenta 29 órdenes de magnitud y por lo tanto $R^{-2}$ es 58 órdenes de magnitud menor; con esto hallamos que el universo observable es sólo una pequeña fracción del universo total[5] y por lo cual el espacio en nuestro vecindario es aproximadamente plano. Además, como el contenido de materia alcanza el horizonte de eventos, llega un momento en el cual todas las partículas están en contacto causal, explicando la homogeneidad que vemos en el CMB (Cosmic Microwave Background). Finalmente los desórdenes topológicos que fueron creados primordialmente, fueron dispersados por la inflación haciendo que su densidad disminuyera de tal modo que ya no constituyen una amenaza para la estabilidad del universo.
No se comenta más acerca del régimen de oscilaciones rápidas por ser un tema más delicado y más técnico y además porque no es relevante para este trabajo; todo lo que necesitamos saber es que en las escalas de tiempo en las cuales estamos interesados el modelo funciona muy bien.

## 2.2. Métrica de Senovilla

Lamentablemente, a pesar de que el modelo estándar de la cosmología tiene un alto poder predictivo en la actualidad del universo, la realidad es que nuestro universo no es exactamente homogéneo, y nada nos conduce a pensar que fue homogéneo primordialmente. Es por esto que se buscan modelos que permitan un cierto grado de inhomogeneidad y que produzcan soluciones con sentido físico en la distribución de momento energía, y en la evolución del universo desde el principio (de los tiempos).
J. M. M. Senovilla, basado en un trabajo anterior de él mismo y A. Feinstein [21], encontró una solución cosmológica a las ecuaciones de campo que produce un universo inhomogéneo con una ecuación de estado real, y que principalmente, no fue creado a partir de una sigularidad inicial, sino de una forma inicial no singular de la métrica [20]. La forma más general de la métrica es:

$$ds^2 = e^{2f}(-dt^2 + dx^2) + G(qdy^2 + q^{-1}dz^2) \tag{2.5}$$

Aquí $G$, $f$ y $q$ dependen de $t$ y $x$ de la siguiente forma:

$$e^f = [A\cosh(at) + B\sinh(at)]^2 \cosh(3ax)$$

$$G = [A\cosh(at) + B\sinh(at)]\sinh(3ax)\cosh^{-2/3}(3ax)$$

$$q = [A\cosh(at) + B\sinh(at)]^3 \sinh(3ax)$$

[5] Cuyo radio sería el del horizonte de eventos

Con $a$, $A$ y $B$ parámetros constantes, que pueden ser fijados a conveniencia del modelo. Vemos el comportamiento de estas funciones en las figuras 2.4, 2.5, 2.6, en donde aparecen en función del tiempo y la coordenada $x$, para ciertos valores de $A, B, a$. Además vemos que las variaciones en la inhomogeneidad son pequeñas, ya que en las figuras 2.7 y 2.8 están graficadas las funciones $Gq$ y $G/q$, respectivamente, y se ve que respecto a la gráfica 2.4 de $e^f$, son comparables, y a pesar de que en el tiempo crecen exponencialmente, el tratamiento sigue siendo adecuado. La solución de Senovilla y Feinstein es el caso $A = 0$, para el cual en $t = 0$ hay problemas ($q$ se vuelve cero, y la parte de $z$ en la métrica se indetermina). Pero para la métrica escrita de la forma completa no hay problemas de singularidad, ya que para todo $t \geq 0$, $q$ no tiende a cero. Ahora podemos ver los aspectos físicos de la métrica, sustituyendo en las ecuaciones de campo para obtener la forma de la presión y la densidad:

$$p = \frac{1}{8\pi G}[A\cosh(at) + B\sinh(at)]^{-4}\cosh^{-4}(3ax)$$

Y la ecuación de estado de fluido perfecto:

$$\rho = 3p$$

Que generalmente se toma para épocas dominadas por la radiación. Vemos que la densidad y la presión siempre estarán bien definidas (es decir, están definidas positivas), son finitas y sin discontinuidades para cualquier valor de $t, x$ siempre que $A^2 > B^2$. Es posible demostrar por medio de un análisis del tensor de Weyl en la tétrada natural nula de la métrica [24], que los invariantes de curvatura son regulares sobre todo el espacio-tiempo, lo que nos asegura que no hay singularidades como de espacio sobre $\Sigma$. Haciendo un reescalamiento del tiempo, podemos extender el rango de las coordenadas hasta:

$$-\infty < t, x, y, z < \infty$$

Y llegar a que en $t \to -\infty$ el espacio es plano, y la densidad y la presión se vuelven cero. A medida que evoluciona, el fluido se contrae y la densidad (y la presión) alcanza un valor máximo en la hipersuperficie $t = 0$; luego el fluido se expande (principalmente en la dirección $x$) y y la densidad y la presión disminuyen hasta que en $t \to \infty$ el universo vuelve a su estado inicial de planitud[6].
Probablemente los teoremas de singularidad de Ellis y Hawking [20] tendrían algo que decir al respecto de no haber aparecido ninguna singularidad tipo Big-Bang en el modelo. Principalmente establecen que cualquier variedad que utilicemos como modelo cosmológico debe ser globalmente hiperbólica; esto significa que no hay líneas (o geodésicas como) de tiempo cerradas, o en otras palabras que no pueden haber ciclos cerrados del universo. Como el modelo de Senovilla no contradice esto, se pueden presentar problemas.
Sin embargo, gracias a la inhomogeneidad que aparece en $x$, se puede plantear

[6]Este comportamiento se podría tomar como un ciclo de expansión y contracción infinito, como modelo para el universo.

que por el comportamiento patológico de la dirección $x$, algunas geodésicas como de tiempo están incompletas, lo cual hace que el modelo no sea excluido por los teoremas de singularidad. Hasta ahora no se ha visto el efecto que podrían tener las inhomogeneidades en evitar una singularidad inicial, y los modelos inhomogéneos que existen son muy particulares como para dar una conclusión definitiva al asunto. Es necesario tener en cuenta que hay teoremas, como los de singularidad, que siempre deben estar por encima de la formulación y siempre se deben respetar.

## 2.3. Métrica de Kasner

En 1921 E. Kasner solucionó las ecuaciones de campo para un universo anisotrópico sin contenido de momento energía, haciendo que cada 3-variedad fuera plana en el sentido ${}^3\mathbf{R} = 0$. Este modelo, que presenta una alta asimetría, aunque para sólo 3 grados de libertad, tiene una métrica asociada de la forma [3, 6, 13, 22, 23, 24]:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2$$

Con $p_i$ parámetros que describen el comportamiento de las anisotropías, y que cumplen las siguientes condiciones:

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

Cada hipersuperficie de $t = cte$ es plana, ya que todas las componentes $\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^i}$ se anulan. Vemos que el universo que es descrito por esta métrica está en expansión, ya que el volumen $\sqrt{-g} = t$ se va incrementando a medida que el universo evoluciona. Pero esta expansión no es isotrópica, sino que dependiendo de la distribución de $p_i$ la distancia entre dos puntos varía dependiendo de su orientación, es más, mientras en un eje las distancias se incrementan, en alguno de los otros las distancias se contraen. Si bien el modelo de Friedmann-Robertson-Walker es bastante válido en la actualidad, ¿por qué no tomar un modelo anisotrópico que haga que el universo sea altamente anisotrópico en sus inicios, pero que después adquiera la forma que conocemos actualmente?

Un modelo sencillo que aparece citado en [3] que dice que las anisotropías primordiales del universo se borran por la expansión RW, cuando a partir de un tiempo crítico $t_c$ el contenido de materia domina sobre la densidad[7] correspondiente a la curvatura del espacio-tiempo. Se toma una densidad de energía efectiva para la anisotropía $\rho_{an}$, que se ha calculado que vale:

$$\rho_{an} = V^{-2}$$

Donde $V$ es el volumen del universo. Y para el contenido de materia:

$$\rho_{mt} = V^{-\eta}$$

[7] La materia se toma como un fluido que no ejerce presión, para que no haya contradicción con la base del modelo de Kasner.

$\eta$ toma distintos valores dependiendo de la clase de materia que estemos estudiando[8] [3, 12]. Sin embargo, al tomar una ecuación para la expansión como de FRW:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \Big(\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\ln V\Big)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_{an} + \rho_{mt})$$

Encontramos que para cierto tiempo crítico la densidad debida a la anisotropía del universo disminuye gracias al enfriamiento propiciado por la expansión. Esto es conveniente a la hora de plantear un modelo anisotrópico para ser tenido en cuanta en el régimen de la Cosmología Cuántica, pues la curvatura del espacio tiempo domina la geometría en el universo primordial.

Pero para poder aplicar el formalismo, no podemos escoger una métrica que es estacionaria, sino que debemos escoger un modelo dinámico, en los cuales los exponentes de Kasner $p_i$ sean funciones del tiempo. Lifchitz y Khalatnikov fueron pioneros en el trabajo del estudio de estos modelos dinámicos cerca de la singularidad, o Mixmaster [3, 6].

En los modelos Mixmaster se tiene en cuenta alguna parametrización más conveniente que $p_i(p_j)$, pero en adición algunos modelos tienen en cuenta la curvatura espacial, es decir el parámetro no sólo va a depender del tiempo sino también de las coordenadas espaciales. Al hacer esto, se obtiene un universo anisotrópico e inhomogéneo, en añadidura[9]. Pero si queremos estudiar este modelo en el régimen de Cosmología Cuántica Canónica, tenemos que hacer una reparametrización, ya que la forma en la cual está dada la métrica de Kasner es más bien inconveniente por tener el tiempo explícitamente en el escalar de curvatura. En el capítulo sobre la cuantización en el modelo de Kasner esto estará más claro.

La forma en que $u$, o en general los parámetros deben cambiar en el tiempo no es definitiva, ya que la forma de las anisotropías primordiales son desconocidas; sin embargo para el análisis que se hará aquí no será importante el conocimiento de la dependencia temporal de $u$.

### 2.3.1. Más allá del modelo de Kasner

Es posible extender el modelo de Kasner para tener en cuenta distribuciones de momento energía, haciendo que las condiciones sobre los exponentes en la métrica de Kasner no sean 1, sino que, en general [22, 23]:

$$p_1 + p_2 + p_3 = s$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = q$$

Donde $s, q$ son constantes distintas de 1. Cuando se hace esta variación en la métrica, y se sustituye en las ecuaciones de campo, llegamos a:

$$s - q = 4\pi G t^2(\rho + 3P) \tag{2.6}$$

[8] Para materia sin presión, $\eta = 1$, para radiación $\eta = 4/3$ y para un gas ideal $\eta = 5/3$.

[9] Como el modelo de Senovilla es inhomogéneo, sólo nos concentraremos en el modelo homogéneo de Kasner

$$p_i(1-s) = -4\pi G t^2(\rho - p) \tag{2.7}$$

Y, para cada componente de presión:

$$\frac{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3}{t^2} = 8\pi G\rho$$

$$-\frac{p_2^2 + p_3^2 - p_2 - p_3 + p_2p_3}{t^2} = 8\pi G P_x$$

$$-\frac{p_1^2 + p_3^2 - p_1 - p_3 + p_1p_3}{t^2} = 8\pi G P_y$$

$$-\frac{p_2^2 + p_1^2 - p_2 - p_1 + p_2p_1}{t^2} = 8\pi G P_z$$

Que es la distribución de momento energía en un espacio tiempo anisotrópico (estacionario). Lo que vemos aquí es que la presión y la densidad generadas por la anisotropía del universo, se disipan a medida que el tiempo pasa, y podemos tener ecuaciones del tipo $\rho = t^{-2}\rho_0$ y de igual forma para $P$. Con esto se puede tomar por ejemplo el caso de un fluido ideal con ecuación de estado $\rho = P$ (de Zel'dovich), con lo que se obtiene:

$$s = 1, \qquad q = 1 - 16\pi G\rho_0$$

Asimismo, si se cumple la condición $\rho_0 < \frac{1}{24\pi G}$ podemos encontrar solución para una familia continua de valores para $p_1, p_2$ (ya que $p_3 = 1 - p_2 - p_1$), de modo que el universo puede ser anisotrópico. Si la ecuación de estado no es de la forma $\rho = P$, vemos de (2.7) que los $p_i$ deben ser todos iguales, lo cual hace que se pierda la anisotropía. ¿Pero qué condiciones tienen $s, q$ para que tengamos soluciones con sentido físico? Para solucionar esto, tenemos las condiciones de energía, y en particular la condición dominante [23]. Esta condición dice que desde un observador local en reposo, cada componente del tensor momento energía debe ser menor que la densidad de energía medida en el mismo sistema, esto es:

$$|T_{\alpha\beta}| \leq \rho$$

La condición fuerte de energía establece que se debe cumplir la positividad de la energía [19]:

$$T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \geq 0$$

Con $u$ la 4-velocidad del fluido. La condición débil dice que:

$$\rho \geq 0$$

La condición dominante establece en términos físicos, que ninguna onda de sonido puede propagarse más rápido que la luz. Al aplicar esta condición llegamos a:

$$2s(s-1) \geq 0$$

Y además:

$$s \geq \frac{3q^2 - s^2}{2} = \frac{(p_1 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_2 - p_3)^2}{2} \geq 0$$

De las anteriores condiciones llegamos a la condición $s \geq 1$, que incluye el modelo de Kasner en el vacío, y permite muchas otras posibilidades.

## 2.4. Modelos de Bianchi

Los modelos cosmológicos de Bianchi tienen en cuenta la topología de la 4-esfera de RW[10] y le añaden anisotropías, cuya forma depende de cada modelo. Bianchi clasificó los grupos de Lie de simetría local 3-dimensional, y cada uno de estos modelos es homogéneo gracias a que su construcción lleva implícita la invarianza ante ciertas transformaciones [24]. Estos modelos admiten un grupo de Lie de isometría 3-dimensional G que actúa simplemente transitivamente sobre cada hipersuperficie $\Sigma$ de la foliación. Gracias a esto, para cada modelo existe un conjunto de 3 vectores $\xi$ invariantes sobre $\Sigma$ que forman el álgebra de Lie de G [11]:

$$[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij}\xi_k$$

Donde $C$ son las constantes de estructura del grupo. Duales a estos invariantes, armamos un conjunto de 1-formas invariantes $\chi^i$ que deben satisfacer las ecuaciones de Maurer-Cartan:

$$d\chi^i - \frac{1}{2}C^i_{jk}\chi^j \wedge \chi^k = 0$$

Si $C^i_{ik}$ es cero, ese modelo de Bianchi se dice que es de clase A. Si esto no sucede, se dice que es de clase B. Los que son de interés para la cosmología cuántica son los de Clase A, ya que Hawking demostró que los clase B son inconvenientes para hacer la descomposición ADM [25]. Se puede demostrar que las constantes de estructura para los modelos clase A se pueden escribir de la forma:

$$C^i_{jk} = \epsilon_{jkl}S^{il}$$

Con $\epsilon$ el tensor de Levi-Civita y $S$ un tensor simétrico. Al hacer una clasificación más minuciosa de los grupos existentes, se llega a que hay en total 9 tipos distintos de modelos de Bianchi, de los cuales los grupos I, II, VI, VII y IX son de Clase A. Estos se caracterizan por la signatura de $S$, en particular el tipo I tiene signatura (0,0,0), por lo que todas las constantes de estructura se anulan, y las 1-formas son:

$$\chi^i = dx^i$$

Con $x^i$ las coordenadas espaciales usuales. La homogeneidad del modelo se asegura por la invarianza de la métrica asociada ante traslaciones espaciales $(t, x^i) \rightarrow (t, x^i + \chi^i)$.

La signatura del tipo II es (0,0,+), por lo que tenemos para las constantes de estructura:

$$C^i_{jk} = \delta^i_3\epsilon_{3jk}$$

Y las 1-formas quedan de la forma:

$$\chi^1 = dx^1 - x^3 dx^2$$

$$\chi^2 = dx^2\,; \quad \chi^3 = dx^3$$

[10]Robertson-Walker.

Es posible demostrar a partir de lo anterior que la forma general de las métricas de Bianchi Clase A es [6, 11]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{2\alpha} e^{2\beta_{ij}} \chi^i \chi^j \tag{2.8}$$

Aquí $\alpha$ representa el factor de escala, de hecho según Misner [6] $R = e^{\alpha}$, por lo cual la singularidad inicial se presenta en $\alpha \to -\infty$. $\beta_{ij}$ se puede parametrizar para obtener la matriz:

$$\beta_{ij} =: \begin{pmatrix} \beta_+ + \sqrt{3}\beta_- & 0 & 0 \\ 0 & \beta_+ - \sqrt{3}\beta_- & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta_- \end{pmatrix}$$

El hecho que las componentes no diagonales no sean cero no significa que, por ejemplo $e^{\beta_{12}} = 1$: las componentes no diagonales se anulan. Aquí $\beta_\pm$ son los parámetros de anisotropía que se comportarán de una forma similar a los parámetros en Kasner, como se verá en la siguiente sección. La forma de las métricas y el análisis de cada una se encuentra en el capítulo 6.

## 2.5. Relación Bianchi tipo I-Kasner

En el modelo de Bianchi tipo I es posible hacer una parametrización de los $\beta_\pm$ cuando se elimina el factor de escala y se hace una dependencia exclusiva de $\beta_\pm$; esto se puede obtener cuando se reemplaza el tiempo por el factor de escala en las ecuaciones canónicas. Una parametrización [6] en particular, muy cónveniente, expresa $\beta_\pm$ en función de un parámetro $u$ dependiente del tiempo, de la siguiente forma:

$$\beta_+ = -\alpha \frac{u^2 + u + \frac{1}{2}}{u^2 + u + 1}$$

$$\beta_- = -\sqrt{3}\alpha \frac{u + \frac{1}{2}}{u^2 + u + 1}$$

Al sustituir esto en la métrica de Bianchi tipo I, llegamos a la siguiente forma de la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx_1^2 + t^{2p_2} dx_2^2 + t^{2p_3} dx_3^2$$

Con los $p_i$ dados por:

$$p_1 = \frac{-u}{p_u}$$

$$p_2 = \frac{u+1}{p_u}$$

$$p_3 = \frac{u(u+1)}{p_u}$$

$$p_u = u^2 + u + 1$$

La métrica que aparece es la misma métrica de Kasner, con la diferencia que este es un modelo Mixmaster, ya que los $p_i$ dependen del tiempo. Es por esto que vemos que el modelo de Kasner es una particularización del modelo de Bianchi tipo I [13]. Con las ecuaciones para los $p_i$ podemos reescribir la parametrización de los $\beta_{\pm}$:

$$\beta_{+} = -\alpha(p_3 - \frac{p_2 + p_1}{2})$$

$$\beta_{-} = -\alpha(\frac{p_2 - p_1}{2})$$

Evidentemente se reducen los grados de libertad para Bianchi tipo I: nos quedamos sólo con el parámetro $u$, que fue propuesto por E. M. Lifchitz e I. M. Khalatnikov en 1963.

.

.

.

.

# Capítulo 3

# Cuantización del Modelo de Robertson Walker

En el capitulo 2 se estudió el modelo de Robertson Walker en el contexto de la cosmología no cuántica; en este trabajo se muestra la cuantización del modelo según el formalismo de Wheeler DeWitt, y luego se aplica el formalismo de *Dirac Square Root* (DSR) o de la raíz cuadrada de Dirac. Segun se vio en el capitulo 1, para cuantizar un modelo es necesario encontrar el Lagrangiano asociado, de esta forma primero recordamos la forma de la métrica de Robertson Walker, que como se dijo antes produce un Universo maximalmente simétrico [4, 19] y en expansión:

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2(d\xi^2 + \sin^2\xi d\Omega_3) \tag{3.1}$$

O en la forma de la 4-esfera:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)$$

Para encontrar el Lagrangiano, es necesario primero calcular el escalar de curvatura $\mathbf{R}$, según el formalismo (3+1).

$$-\mathbf{R} = K^2 - K_{ij}K^{ij} -^3 \mathbf{R}$$

Al calcular la curvatura extrínseca, se halla $\mathbf{R}$:

$$K_{ij} = -\frac{\dot{R}}{R}h_{ij}$$

$$-\mathbf{R} = 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 (3) -^3 \mathbf{R} = 6\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{6}{R^2}$$

El 3 que aparece es debido a la traza de $h_i^j$. Observamos que en esta expresión sólo aparecen términos hasta la primera derivada temporal del factor de escala.

Si se hubiera calculado $\mathbf{R}$ hallando los símbolos de Christoffel, y luego el tensor de Ricci [28] (como usualmente se hace en Relatividad General) , aparecería un término extra con una segunda derivada temporal del factor de escala:

$$-\mathbf{R} = -\frac{6}{R^2} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - 6\frac{\ddot{R}}{R}$$

Hasta una posible 4-divergencia, el escalar de curvatura calculado según el formalismo (3+1) es idéntico al calculado siguiendo el método usual. La adición de una 4-divergencia el lagrangiano no cambia las ecuaciones de movimiento, ya que sólo contribuye con un término de superficie[1], en este caso la diferencia entre los $\mathbf{R}$ [4]:

$$\mathbf{R}_{ADM} - \mathbf{R}_{usual} = -(-g)^{-1/2}\frac{d}{dt}(6\dot{R}R)$$

Por eso para construir el hamiltoniano, es preferible tomar $\mathbf{R}_{ADM}$.

## 3.1. Formulación Canónica.

Con el escalar de curvatura calculado, es posible encontrar la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}(-\mathbf{R})}{16\pi G} = -\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G}\mathbf{R} \tag{3.2}$$

Como se observa de (3.1), el lapso es $N = 1$, y $h = \det h_{ij}$ es:

$$h = R^6(\sin^2\xi(\sin^2\xi\sin^2\theta))$$

$$\sqrt{h} = R^3\sin^2\xi\sin\theta \tag{3.3}$$

Por lo cual $\mathcal{L}$ es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}6R^3\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{1}{R^2}\right)\sin^2\xi\sin\theta$$

$$= -\frac{6}{16\pi G}(R\dot{R} - R)\sin^2\xi\sin\theta$$

Ahora, podemos encontrar la acción:

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x = -\frac{6}{16\pi G}\int_\Sigma (R\dot{R}^2 - R)\sin^2\xi\sin\theta\, dtd^3x$$

Al integrar sobre una 4-esfera, obenemos:

$$S = -\frac{6\cdot 2\pi^2}{16\pi G}\int (R\dot{R}^2 - R)dt$$

[1] Nótese que este término es similar al que aparece en la acción de Einstein Hilbert en el capítulo 1.

Y, como $S = \int L\, dt$, llegamos a:

$$L = -\frac{3}{4}\frac{\pi}{G}(R\dot{R}^2 - R)$$

Aqui ya sólo está el factor de escala $R$ como parámetro. Ahora, para cuantizar tenemos que hallar el hamiltoniano, de la forma canónica usual tomando a $R$ como la única variable canónica.

$$H = \pi_R \dot{R} - L$$

Calculamos $\pi_R$ según:

$$\pi_R = \frac{\delta L}{\delta \dot{R}} = -\frac{3\pi}{2G} R\dot{R}$$

Despejando $\dot{R}$ de la expresion anterior y reemplazando en $H$, se obtiene:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{2G}{3\pi R}\pi_R^2 + \frac{3\pi}{4G}\left[R\left(\frac{2G\pi_R}{3\pi R}\right)^2 - R\right] \\ &= -\frac{\pi_R^2}{R}\frac{G}{3\pi} - \frac{3\pi}{4G}R \end{aligned}$$

La restricción hamiltoniana aparece cuando vemos que $H$ no debe variar respecto a $N$. A pesar de que en la expresión anterior no aparece $N$ explícitamente, podemos regresar a la expresión (3.2) y ver que:

$$H = N\mathcal{H} = N\left(-\frac{\pi_R^2}{R}\frac{G}{3\pi} - \frac{3\pi}{4G}R\right)$$

Por lo cual $\frac{\delta H}{\delta N} = \mathcal{H}$ y además es igual a cero, ya que en el Lagrangiano no aparecen términos con derivadas temporales de $N$; por lo anterior obtenemos la restricción:

$$\pi_N = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0$$

Como esta restricción es válida para cualquier tiempo, tenemos que $\dot{\pi}_N = 0$. Y si escribimos los corchetes de Poisson, llegamos a:

$$\dot{\pi}_N = -\{H, \pi_N\} = \frac{\delta H}{\delta N} = 0$$

Ahora, si cuantizamos sobre $\pi_R$, segun el procedimiento de cuantización canónica de Dirac[2] $[\hat{R}, \hat{\pi}_R] = i$ [4, 27]:

$$\pi_R \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial R} \tag{3.4}$$

Por lo cual la restricción hamiltoniana viene sobre una función de onda que depende del factor de escala. Al cuantizar según (3.4), obtenemos la ecuación de Wheeler DeWitt para el modelo cerrado de Robertson Walker:

$$\mathcal{H}\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{9\pi^2}{4G^2}R^2\right)\psi[R] = 0 \tag{3.5}$$

[2]Este procedimiento no se hace sobre $N$ pues la restricción hamiltoniana $\mathcal{H}$ lo evita.

## 3.2. Descomposición de Dirac.

Al igual que la ecuación de Klein Gordon, la ecuación de Wheeler DeWitt (3.5) presenta el problema de que la densidad de probabilidad no está definida positiva, por lo cual aparecen problemas físicos de interpretación, que por demás son indeseables en cualquier teoría, ya que probabilidades negativas no tienen sentido dentro del contexto de la física. Otro problema que aparece en (3.5) es que no tenemos una ecuación de continuidad que hable de la conservación de la probabilidad. Es por esto que se propone aplicar el formalismo de la raíz cuadrada, factorizando (3.5) y volviéndola una ecuación diferencial de grado 1, en la cual la solución es una función de onda tipo espinor, de dos componentes. Siguiendo esta formulación, en particular para nuestro modelo proponemos un hamiltoniano de la forma:

$$\mathcal{H}_D = \hat{A}\pi_R + \hat{B}kR$$

Con $\hat{A}$, $\hat{B}$ matrices $2\times 2$, y $k = \frac{3\pi}{2G}$. Este hamiltoniano actúa sobre una función de onda tipo espinor:

$$\left(\hat{A}\pi_R + \hat{B}kR\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Ahora, la condición que se le exige a $\mathcal{H}_D$ es que al elevar al cuadrado, se obtenga de nuevo la ecuación (3.5):

$$\begin{aligned}(\hat{A}\pi_R + \hat{B}kR)(\hat{A}\pi_R + \hat{B}kR) &= \hat{A}^2\pi_R^2 + \hat{B}^2k^2R^2 + k\{\hat{A},\hat{B}\}\pi_R R\\ &= \pi_R^2 + k^2R^2\end{aligned}$$

De lo anterior, llegamos a las siguientes condiciones sobre las matrices $\hat{A}$, $\hat{B}$:

$$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 = \hat{1}$$

$$\{\hat{A},\hat{B}\} = 0$$

Al expresar estas ecuaciones en términos de sus componentes, llegamos a:

$$a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 1 \qquad a_{11} = -a_{22}$$

$$b_{11}^2 + b_{12}b_{21} = 1 \qquad b_{11} = -b_{22}$$

$$2b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + a_{12}b_{21} = 0$$

En particular, una solución simétrica y muy agradable a la vista es:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Como estas dos matrices son reales, se ve directamente que $\mathcal{H}_D$ es hermítico, lo cual es requerido para el sentido cuántico del asunto. Ahora, al cuantizar según (3.4), llegamos a:

$$-i\hat{A}\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial R} + \hat{B}kR\underline{\psi} = 0 \tag{3.6}$$

Y por componentes la ecuación anterior se escribe de la siguiente forma:

$$-i\frac{\partial\psi_2}{\partial R} + kR\psi_1 = 0 \tag{3.7}$$

$$-i\frac{\partial\psi_1}{\partial R} - kR\psi_2 = 0 \tag{3.8}$$

Estas ecuaciones diferenciales acopladas se pueden desacoplar por sustitución, por lo cual se obtiene:

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial R} + k^2 R\psi_1 = 0 \tag{3.9}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial R} + k^2 R\psi_2 = 0 \tag{3.10}$$

La forma de la solución de (3.7) y (3.8) es:

$$\psi_1 = a_1 e^{\omega R^2} + a_2 e^{-\omega R^2} \tag{3.11}$$

$$\psi_2 = b_1 e^{\omega R^2} + b_2 e^{-\omega R^2} \tag{3.12}$$

Al sustituir este Ansatz en (3.7), (3.8), se obtiene $\omega = k/2$ y también la relación entre los $a$, $b$:

$$\frac{b_1}{a_1} = -i$$

$$\frac{b_2}{a_2} = i$$

Como el modelo que estamos estudiando no tiene constante cosmológica ni tampoco un campo de materia, lo que tenemos es una expansión de $R = 0$ al infinito, por lo cual por ahora no podemos eliminar niguna de las soluciones, pues si bien la exponencial positiva favorece un universo con expansión, es infinita, y eso no es conveniente. La otra solución está acotada y no es infinita, pero predice un universo que colapsa. Sin embargo, reduciremos el caso a tomar una de las dos soluciones, porque tomar una superposición lineal complica los cálculos y no muestra lo básico de cada comportamiento; además cuando la exponencial positiva domine, la otra exponencial no tendrá efecto alguno. La condición es, entonces:

$$a_1 a_2 = 0 \tag{3.13}$$

De modo que las soluciones posibles son:

$$\psi = a_1 e^{\omega R^2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \qquad \psi = a_2 e^{-\omega R^2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

En la siguiente sección encontraremos por medio de argumentos de conservación, que la mejor solución es la segunda.

## 3.3. Cuestiones de Continuidad

Para ver la evolución del universo durante la expansión, es necesario ver que cantidades permanecen conservadas, y si no se conservan, encontrar la relación entre ellas por medio de alguna ecuación de continuidad. Lo que se hace es manipular la ecuación (3.6) hasta obtener alguna cantidad conservada durante la expansión.
Tomamos la conjugada de la ecuación (3.6) para obtener:

$$i\frac{\partial(\underline{\psi}^{\dagger}\hat{A})}{\partial R} + (\underline{\psi}^{\dagger}\hat{B})kR = 0 \tag{3.14}$$

Multiplicando el lado derecho de la ecuación anterior por $\psi$, y multiplicando el lado izquierdo de (3.6) por $\psi^{\dagger}$, obtenemos[3]:

$$-i(\psi^{\dagger}\hat{A})\frac{\partial\psi}{\partial R} + (\psi^{\dagger}\hat{B}\psi)kR = 0$$

$$i\frac{\partial(\psi^{\dagger}\hat{A})}{\partial R}\psi + (\psi^{\dagger}\hat{B}\psi)kR = 0$$

Al restar estas ecuaciones, llegamos a:

$$i\big(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial R} + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial R}\psi\big) = 0$$

Con

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}A =: (\psi_2^{\dagger} \quad \psi_1^{\dagger})$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}\psi}{\partial R} = 0$$

Como $\bar{\psi}\psi$ no es necesariamente una cantidad positiva, la denominaremos *corriente de probabilidad* $j$, y la ecuación de continuidad queda escrita de la forma:

$$\frac{\partial j}{\partial R} = 0$$

Tenemos esta cantidad que se conserva en la expansión y que vale:

$$j = \psi_2^{\dagger}\psi_1 + \psi_1^{\dagger}\psi_2$$

$$j = 0$$

Para cualquiera de los dos modelos. Esto ocurre por lo que nos restringimos a cada uno de los comportamientos por aparte; si hubiésemos tomado la superposición de los dos $j$ no sería cero, pero la diferencia de los dos estados se incrementa de una forma tan dramática después de $R = 1$, que $j$ tendería muy

[3] A partir de aquí ignoraremos la notación $\underline{\psi}$; sólo se utilizará cuando sea necesario hacer evidente la diferencia entre el espinor y la funcion de onda.

rápidamente a cero[4].
Vemos que no fue muy útil la ecuación de conservación, pero podemos proponer una densidad de energía que esté definida positiva:

$$\rho = \psi_1^\dagger \psi_1 + \psi_2^\dagger \psi_2$$

En el caso de la exponencial positiva, esta cantidad vale:

$$\rho = |a_1|^2 e^{2\omega R^2}$$

Y para la exponencial negativa:

$$\rho = |a_2|^2 e^{-2\omega R^2}$$

En las figuras 3.1 y 3.2 vemos la gráfica de estas probabilidades en función del factor de escala (normalizadas a 1). De aquí encontramos que la función de onda que produce una densidad finita, es decir que es de cuadrado integrable, es la exponencial decreciente. Como éesto es lo que estamos buscando, nuesta elección es la solución:

$$\psi = a_2 e^{-\omega R^2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Que hace que la probabilidad se conserve y sea:

$$\mathcal{P} = |a_2|^2 \int_0^\infty e^{-2\omega R^2} dR = |a_2|^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{P} \sim m_{Pl}^{-1} \tag{3.16}$$

Es proporcional al inverso de la masa de Planck. En general no podemos encontrar el valor exacto de esta cantidad debido a que las condiciones iniciales que definen $a_2$ son desconocidas. Lo que podemos concluir es que la masa de Planck sirve para normalizar las condiciones iniciales en un posible Big-Bang.
Si tomamos las condiciones de Linde y Hartle Hawking en este caso, tenemos que la condición de Linde hace que la función de onda que crece con el tiempo (más exactamente, con $\sqrt{h} = R^3$) se anule; la de Hartle Hawking hace lo contrario, pues es ésta la que sobrevive (la que crece con el tiempo), lo que está en desacuerdo con nuestra propuesta de conservación global de la probabilidad. La propuesta de Vilenkin no se puede tener en cuenta, pues las funciones de onda obtenidas no dicen nada sobre el sentido de la expansión, es decir, no hay ondas salientes o entrantes como parte de la solución.

## 3.4. Condiciones de Frontera

En la sección anterior veíamos la aplicación de una condición de frontera muy particular, en la cual aceptamos únicamente soluciones de onda saliente o

[4]Se podría argumentar que dependiendo de las condiciones iniciales es posible hacer comparables las dos funciones en un rango de $R$ más amplio, pero como desconocemos las condiciones iniciales, es mejor restringirnos a tomar los comportamientos por aparte.

que no divergen para $R \to \infty$. Pero para ver más claramente las diferencias entre las propuestas generales para condición de frontera, enumeradas en el capítulo 1 es necesario referirnos la la ecuación de Friedmann con constante cosmológica que vimos en el capítulo 2, y a partir de la expresión para $\pi_R$ (que no debe cambiar pues el término extra no tiene que ver con $\dot{R}$), llegamos a [16]:

$$\pi_R^2 + R^2 - \frac{R^4}{R_v^2} = \epsilon \tag{3.17}$$

$\epsilon$ se refiere a la cantidad de radiación que contiene el universo, y $R_v = \frac{3}{4}\rho_v^{-1/2}$ [5]. Esta ecuación, si la vemos clásicamente se refiere al movimiento de una partícula en un potencial que en $R = R_0$ tiene un máximo, y en $R = 0$ tiene un pozo. Para esta partícula, a $\epsilon <$(*altura de la barrera*) sólo existen dos trayectorias posibles clásicamente, un movimiento desde $R = 0$ hasta un radio $R_1$, para luego devolverse, y también puede llegar del infinito hasta un radio mínimo $R_2$, y vuelve a irse para el infinito. La interpretación que se le da a esto es que el universo clásicamente puede expandirse a partir de radio cero hasta cierto radio, para después colapsar, o bien puede estar contrayéndose desde un radio infinito hasta llegar a cierto punto en el cual se expande al infinito. Ni la constante cosmológica ni el contenido de radiación en el universo son tan grandes para permitir que el universo se hubiese expandido hasta su tamaño actual, para después encontrar la barrera y recolapsar. Las observaciones tampoco dan para que el universo venga de una contracción hasta cierto radio crítico y esté en la era de expansión hacia el infinito. Pero hay otra opción, que nos da la cosmología cuántica, y es el tunelamiento. Porque si la ecuación de Friedmann se toma en el régimen cuántico, existe la opción del universo tunelando a través de la barrera de potencial, habiendo comenzado desde $R = 0$, y continúe su expansión al infinito. La ecuación de Wheeler DeWitt para ese modelo es:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - k^2R^2 + \frac{\Lambda}{3}R^4\Big)\psi[R] = \epsilon\psi[R] \tag{3.18}$$

Que se obtiene cuantizando según $\pi \to -i\partial$, y teniendo en cuenta que la ecuación de Friedmann aparece de las ecuaciones de campo, o más directamente, de la minimización de la acción de Einstein Hilbert teniendo en cuenta la constante cosmológica. La propuesta de suponer que el universo puede tener una función de onda de tunelamiento es debida a Vilenkin, que propone en general que la función de onda del universo no debe tener componentes de tipo onda entrante. La probabilidad semiclásica de tunelamiento fue calculada por Vilenkin [4, 16], que encontró que vale:

$$\mathcal{P} \sim e^{-2\int_0^{R_v}|\pi_R|dR} = e^{-\frac{3}{8\rho_v}}$$

para el universo sin contenido de radiación, es decir, el universo puede tunelarse desde la nada hasta un universo de radio $R_v$. La solución a esta ecuación de

[5]Esta densidad del vacío está relacionada con la constante cosmológica de la forma $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Wheeler DeWitt[6] viene dada por una superposición de ondas salientes y entrantes por fuera de la barrera, y en la región de tunelamiento tenemos una exponencial decayendo y una creciendo (como obtuvimos en la sección anterior en la ausencia de potencial externo). Según la condición de Vilenkin de tunelamiento desde $R = 0$ seleccionamos la onda saliente. Como en esta solución las exponenciales se desvanecen naturalmente al salir de la barrera de potencial, no es necesario restringirlas. En el Modelo Estándar de la cosmología se reemplaza la energía del vacío (que aquí está representada por la constante cosmológica) por un potencial de un campo escalar $\phi$, como veíamos en el capítulo 2; entonces, en el régimen pre-inflación en donde el potencial varía lentamente, reemplazamos la densidad por este potencial, y llegamos a la siguiente expresión para la probabilidad:

$$\mathcal{P} \sim e^{-\frac{3}{8V(\phi)}}$$

Entonces la probabilidad es mayor para una evolución con valores elevados de potencial, por lo cual esta forma de la probabilidad favorece la inflación (que es lo requerido para que el modelo estándar de la cosmología funcione). La función de onda de Vilenkin la vemos en la Figura 3.3, donde vemos el comportamiento de onda saliente después de superar la barrera de potencial, y los comportamientos exponenciales en el interior de la barrera.

Como habíamos mencionado en el capítulo 1, la forma de abordar la condicion de frontera de Hartle-Hawking [5] es por medio de los instantones, o los puntos estacionarios de la acción, esto es:

$$\psi_{HH} \sim e^{-S_E}$$

La acción euclideana que se toma es la generada por la ecuación de movimiento del campo escalar, por lo cual $S_E = -\frac{3}{8V(\phi)}$, y la probabilidad es:

$$\mathcal{P} \sim e^{+\frac{3}{8V(\phi)}}$$

La función de onda de Hartle Hawking se compone de ondas entrantes y salientes en el régimen de expansión libre, y dentro de la barrera de potencial sólo aparece la exponencial creciente (la decreciente ha sido anulada por la condición de frontera). Esta forma de la probabilidad nos dice lo contrario de la predicción de Vilenkin: que es muy poco probable que el universo evolucione con un potencial de campo escalar elevado, haciendo que sea menos probable un universo primordial inflacionario. Entonces la mayoría de universos serían muy pequeños y no durarían mucho, por las razones que mencionábamos en el capítulo 2. Es aquí donde vuelve a entrar en escena el principio antrópico, ya que si somos observadores típicos, así la mayoría de universos creados no permitan la existencia de observadores, obligatoriamente estamos en un universo inflacionario, confirmando así el Modelo Estándar de la Cosmología (al menos en nuestro universo,

[6] No es necesario escribirla explícitamente porque en este trabajo este apartado tiene carácter ilustrativo, ya que no constituye un resultado obtenido por nosotros.

por poco probable que sea su existencia). En la figura 3.4 está graficada la función de onda de Hartle Hawking, mostrando el comportamiento de exponencial creciente dentro de la barrera, y fuera la superposición de ondas entrantes y salientes.

La propuesta de Linde varía la función de onda eliminando la exponencial creciente y dejando la creciente, sin tocar las ondas entrantes y salientes en el régimen libre, ya que la frontera se fija para eliminar la solución que no crece con $\sqrt{h} = R^3$, al contrario de lo que pasa con la función de onda de Hartle-Hawking [16]. El comportamiento de la función de onda de Linde se observa en la figura 3.5, donde vemos que por fuera de la barrera de potencial es muy similar a la de Hartle Hawking.
Si bien todas las propuestas producen resultados válidos, la que menos problemas técnicos presenta y está más de acuerdo con un universo como el nuestro es la de Vilenkin.

## 3.5. Modelo de Friedmann Robertson Walker

Para abordar el problema de la constante cosmológica dentro de la formulación DSR, podemos tomar dos caminos. En el primero, hacemos un análogo al análisis que hicimos al comienzo, factorizando la ecuación de Wheeler DeWitt para el modelo FRW (3.18) proponiendo un hamiltoniano factorizado de la forma:

$$\mathcal{H}_D = A\pi_R + kB\sqrt{R^2 - \frac{\Lambda}{3}R^4}$$

Qua actúe sobre la función de onda tipo espinor, con dos componentes $\psi_1, \psi_2$. Las matrices $A, B$ cumplen las mismas condiciones que cumplían en el caso Robertson Walker, por lo cual en particular pueden ser las mismas. Al calcular para cada componente espinorial, tenemos una ecuación de segundo orden de la forma:

$$-\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{1}{k\sqrt{R^2 - \frac{\Lambda}{3}R^4}}\frac{\partial\psi_i}{\partial R}\Big) + k\sqrt{R^2 - \frac{\Lambda}{3}R^4}\psi_i = 0$$

A pesar de los desagradable de esta ecuación, *Mathematica* pudo hallar la solución general, con la sustitución $R \to kR$, por conveniencia:

$$\psi_i = C_1 \exp\Big(\frac{\sqrt{1 - 3sR^2 + 3s^2R^4 - s^3R^6}}{3s}\Big) \tag{3.19}$$

O también:

$$\psi_i = C_2 \exp\Big(-\frac{\sqrt{1 - 3sR^2 + 3s^2R^4 - s^3R^6}}{3s}\Big) \tag{3.20}$$

Aquí $s = \Lambda/3$. Vemos que estas soluciones permiten comportamiento exponencial en una región separada de la región en la cual hay ondas salientes o entrantes, según veíamos en la sección anterior. Si la constante cosmológica fuera 0.0003, según el signo del polinomio en el interior de la exponencial tenemos régimen exponencial u ondulatorio. En la figura 3.6 está graficado este polinomio en función de $R$, para ver que la función cambia de signo en $R = 100$ (lo que no nos dice mucho). Lo que sí nos dice es que el comportamiento se mantiene a pesar de haber factorizado el hamiltoniano. En general, las raíces de este polinomio se encuentran en $R = -1/\sqrt{s}$ y en $R = 1/\sqrt{s}$, lo cual nos dice que se supera la barrera de potencial debido a la energía del vacío cerca de[7] $R_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ que es precisamente la cota que pone Vilenkin para el tunelamiento. Es aquí donde debemos poner las condiciones de frontera. En la de Vilenkin quitamos la segunda solución, ya que el régimen oscilatorio es una onda entrante. Entonces, según Vilenkin la función de onda es una exponencial decreciente (Figura 3.7) que arranca desde cierta condición inicial y se tunela a través del potencial que impone la densidad de energía del vacío; al pasar la barrera predice un universo en expansión, con la onda saliente. En la condición de Hartle-Hawking debemos tener en cuenta que anulamos la exponencial decreciente, por lo cual ya no tenemos ondas entrantes, y la función de onda sería idéntica a la predicha por Vilenkin. La condición de Linde, que elimina la exponencial creciente, permite ondas entrantes pero no ondas salientes, lo cual predice un universo que viene de un estado $R \to \infty$, choca con la barrera de potencial y se tunela hasta llegar a un estado $R = 0$. Como esto es puramente probabilístico, estos comportamientos no son 100 % iguales a los que veríamos cerca del Big-Bang, además no hemos tenido en cuenta que el potencial debido a la constante cosmológica lo tenemos que alterar para tener en cuenta el modelo inflacionario. Gracias a que la ecuación de Dirac Wheeler DeWitt tiene la misma forma que en el modelo de Robertson Walker, la ecuación de continuidad que definamos será trivial, y no nos dará información sobre el balance en las cantidades probabilísticas. Gracias a la forma de las funciones de onda, sí es posible encontrar que éstas son de cuadrado integrable, lo cual nos habla de la conservación global de la Probabilidad. Sin embargo, no es posible calcular la probabilidad explícitamente en función de $\Lambda$, y la dependencia numérica no es útil en el sentido interpretativo; toda la información que se necesita es saber cual es el comportamiento de la función de onda para diferentes condiciones. Además, como hemos dicho antes la manera más adecuada de intentar lanzar predicciones en Cosmología lo da el modelo inflacionario; en el capítulo final regresaremos a este tema y mencionaremos algunas formas de abordar este problema desde el formalismo DSR. El segundo método para hacer la factorización radica en obtener una ley de conservación para la densidad, por lo cual la ecuación de Dirac Wheeler DeWitt que se propone es:

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial R} = kRA\psi + k\sqrt{\Lambda/3}B\psi$$

Con $A, B$ las mismas matrices que se han tratado en este capítulo para la factorización. Con esta ecuación es posible obtener la ecuación de Wheeler DeWitt original, como debe ser. El problema es que al expresar esa ecuación por com-

[7] La raíz negativa no nos importa, ya que el rango de $R$ es los reales positivos.

ponentes:

$$-i\frac{\partial \psi_1}{\partial R} = -kR\psi_1 + k(\Lambda/3)^{-1/2}\psi_2$$

$$-i\frac{\partial \psi_2}{\partial R} = kR\psi_2 + k(\Lambda/3)^{-1/2}\psi_2$$

Y al tratar de despejar para cualquiera de las $\psi$, encontramos que la ecuación diferencial es poco menos que insoluble, por lo cual no se muestra aquí este resultado; además el método anterior funcionó bien, y este otro método es más bien forzado para obtener una ecuación de continuidad. Pero como con el modelo anterior pudimos obtener conservación global de la probabilidad, rechazaremos de plano este método.

.

.

# Capítulo 4

# Cuantización en el modelo de Senovilla

Análogamente al caso de Robertson Walker, para cuantizar este modelo es necesario calcular la curvatura extrínseca para hallar el lagrangiano. Para esto, planteamos la forma de la métrica en la forma (3+1):

$$N = e^{2f(t)}; \quad N^i = 0$$

$$h_{ij} =: \begin{pmatrix} e^{2f(t)} & 0 & 0 \\ 0 & Gq & 0 \\ 0 & 0 & G/q \end{pmatrix}$$

$$h^{ij} =: \begin{pmatrix} e^{-2f(t)} & 0 & 0 \\ 0 & (Gq)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q/G \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, calculamos las componentes de $K$:

$$K_{11} = -\dot{f}; \quad K^{11} = -e^{-4f}\dot{f}$$

$$K_{22} = -\frac{1}{2}e^{-2f}(\dot{G}q + G\dot{q}); \quad K^{22} = -\frac{e^{-2f}}{2Gq}\Big(\frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{q}}{q}\Big)$$

$$K_{33} = -\frac{e^{-2f}}{2}\frac{G}{q}\Big(\frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{q}}{q}\Big); \quad K^{33} = -\frac{e^{-2f}}{2}\frac{q}{G}\Big(\frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{q}}{q}\Big)$$

Y podemos obtener el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}e^{-f}G\Big((\frac{\dot{q}}{q})^2 - (\frac{\dot{G}}{G})^2 - 4\dot{f}(\frac{\dot{G}}{G})\Big) -^3 \mathbf{R}$$

A partir del lagrangiano podemos hallar los momentos conjugados a las variables canónicas $f$, $G$ y $q$:

$$\pi_f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = -2e^{-f}\dot{G}$$

$$\pi_G = -e^{-f}\frac{\dot{G}}{G} - 2e^{-f}\dot{f}$$

$$\pi_q = e^{-f}G\frac{\dot{q}}{q^2}$$

Si despejamos $\dot{f}$, $\dot{G}$ y $\dot{q}$ en términos de los momentos, obtenemos para el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \pi_f\dot{f} + \pi_G\dot{G} + \pi_q\dot{q} - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \frac{5}{8}\frac{e^f}{G}\pi_f^2 - 2e^f\pi_G\pi_f + \frac{1}{2}\frac{q^2e^f}{G}\pi_q^2 - e^{3f}G\,{}^3\mathbf{R}$$

Esta es la restricción hamiltoniana que lleva a la ecuación de Wheeler DeWitt, cuando cuantizamos según la relación $[q, \pi_q] = i$:

$$\pi_{()} \to \frac{\partial}{\partial()}$$

Al hacer esto, obtenemos la ecuación que nos da información sobre la función de onda de un universo con una metrica tipo Senovilla:

$$\Big(\frac{5}{8}\frac{\partial^2}{\partial f^2} - 2G\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial G} + \frac{q^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + v^2\Big)\psi[f, G, q] = 0 \tag{4.1}$$

Con $v^2 = e^{2f}G^2\,{}^3\mathbf{R}$. Desde aquí podemos ver que (4.1) presenta una asimetría en $G$, ya que no encontramos términos de orden 2, sólo un término mezclado con $f$. Esto puede llevar a que la factorización de Dirac presente problemas.

## 4.1. Descomposición de Dirac

Con la ecuación (4.1) no podemos plantear una ecuación de continuidad, por lo cual así como en el caso de la métrica de Robertson Walker queremos factorizar según el formalismo DSR. Para hacer esto planteamos un Hamiltoniano matricial que actúe sobre una función de onda tipo espinor, y por lo cual sólo tendrá primeras derivadas de las variables canónicas:

$$\mathcal{H}_D = \hat{\phi}\pi_f + \hat{\gamma}\pi_G - \hat{\theta}\pi_q - \hat{\chi}v$$

Tenemos la condición $\mathcal{H}_D^2 = \mathcal{H}$, con la cual obtenemos la restricción sobre las matrices:

$$\phi^2 = \frac{5}{8}I; \quad \gamma^2 = 0 \quad \{\phi, \gamma\} = -2G$$

$$\theta^2 = -\frac{q^2}{2} \quad \chi^2 = I \quad \{\theta, \chi\} = 0$$

Al expresar estas relaciones en términos de sus componentes, llegamos a las condiciones:

$$\phi_{11} + \phi_{22} = 0 \quad \phi_{11}^2 + \phi_{12}\phi_{21} = \frac{5}{8}$$

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} = 0 \quad \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}\gamma_{21} = 0$$
$$2\phi_{11}\gamma_{11} + \phi 12\gamma_{21} + \phi 21\gamma_{12} = -2G$$
$$\theta_{11} + \theta_{22} = 0 \quad \theta_{11}^2 + \theta_{12}\theta_{21} = -\frac{q^2}{2}$$
$$\chi_{11} + \chi_{22} = 0 \quad \chi_{11}^2 + \chi_{12}\chi_{21} = 1$$
$$2\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{21} = 0$$

A continuación demostraremos que el hamiltoniano matricial que se obtiene no es hermítico. Si el hamiltoniano que obtenemos no es hermítico, no sólo tenemos problemas según la mecánica cuántica, sino que no podremos obtener una ecuación de continuidad bien definida, que es lo que buscamos con el procedimiento DSR. Esto ocurre porque es necesario adjuntar el hamiltoniano que se obtenga,para despues aplicarlo sobre la función de onda espinorial adjunta: si esta nueva ecuación no está bien definida, no es posible obtener una ley de conservación.
Si $\mathcal{H}_D$ es hermítico, tenemos dos opciones para las matrices: o son Reales y Simétricas o son Antisimétricas con sus componentes fuera de la diagonal Imaginarias. Supongamos que $\gamma$ es Real y Simétrica; por lo cual:

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\gamma_{11}^2 = -\gamma_{12}^2 < 0$$

Vemos que $\gamma_{11}$ es imaginario, lo cual entra en contradicción con la hipótesis $\gamma \in \mathbb{R}$.
Entonces, $\gamma$ debe cumplir $\gamma_{11} \in \mathbb{R}$ y $\gamma_{12} = -\gamma_{21} = i\beta \in \mathbb{I}$, con $\beta \in \mathbb{R}$. De lo anterior, obtenemos:

$$\gamma_{11}^2 + \beta^2 = 0$$

Entonces $\gamma_{11} \in \mathbb{I}$, lo cual también contradice la hipótesis. Como nos quedamos sin opciones, la conclusión es que no es posible hacer la factorización de Dirac en (4.1) y obtener un Hamiltoniano con sentido físico.

## 4.2. Comentarios Adicionales

En el capítulo 2 veíamos que existe una forma explícita para el modelo cosmolíogico de Senovilla, en términos de algunos parámetros, más exactamente $a, A, B$. Dado que la calibración de estos parámetros da más exactamente la dinámica del modelo, ¿por qué no intentar aplicar un modelo como el Mixmaster y tomar esas variables como dinámicas? La respuesta la da la cuantización del modelo de Kasner en el capítulo 5, en donde se ve que cuando aparece el tiempo, o en este caso el tiempo y las coordenadas explícitamente en la forma de la métrica, el caso se vuelve más delicado, y a menos que no hayan otros términos, como ocurre en Kasner, la dinámica de los modelos en el régimen de

la Cosmología Cuántica no se puede solucionar por medio de la cuantización canónica. Esto se debe en gran parte a que clásicamente uno puede definir el tiempo según lo está observando, o según uno lo quiera fijar; en mecánica cuántica la situación es diferente, ya que el tiempo que se tiene es similar al tiempo cosmológico, que todos los observadores lo ven idéntico. Y como este tiempo es medible sólo en términos de los parámetros cosmológicos, no se pueden mezclar en un formalismo las dos definiciones, a menos que la situación (Kasner) lo permita.
En el capítulo 2 decíamos que el modelo cosmológico de Senovilla no presentaba singularidad inicial, asi que ¿por que querríamos estudiar este universo a escalas de Planck si en ningún momento llega a estar tan contraído, y si además no tiene un principio definido? Primero que todo, no tenemos singularidad inicial sólo si escogemos adecuadamente los parámetros $A, B$, de modo que el modelo más general si admitiría singularidades iniciales (como es el caso del modelo de Feinstein y Senovila). Segundo, es posible escalar la densidad de energía y la presión que calculamos en el capítulo 2 para obtener en $t = 0$ una densidad de energía crítica de la escala de Planck ($\rho_{Pl} = E_{Pl}/l_{Pl}^3$), y esperar a que el universo se enfríe y se aplane en $t \to \infty$, tal como lo predice el modelo.

No es posible encontrar un comportamiento aproximado para la ecuación de Wheeler DeWitt, pues es el escalar de curvatura depende de las variaciones espaciales de las variables canónicas, lo cual complica los cálculos, y en adición estas variaciones dependen de la escogencia de los parámetros $a, A, B$, y en el caso estudiado en [21], sólo del parámetro $a$. Y aun al calcular estas variaciones, en general no es posible expresarlas en términos de las variables puras, por lo cual no es posible hallar la solución exacta.

# Capítulo 5

# Cuantización en el modelo de Kasner

Recordamos del capítulo 2 que la forma de la métrica cosmológica de Kasner es:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}dz^2$$

Con la condición $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, que hace que sólo exista un parámetro dependiente del tiempo. Vemos que la condición que aparece, en el espacio de las $p_i$ es la intersección de un plano y una esfera, lo que produce una circunferencia, que puede ser parametrizada de alguna forma más conveniente que $p_1(p_1), p_2(p_1), p_3(p_1)$. El círculo que produce la intersección aparece en la figura 5.1 en el espacio de los $p_i$.
Es útil escribir la métrica en la forma (3+1):

$$N = 1; \quad N^i = 0$$

$$h_{ij} =: \begin{pmatrix} t^{2p_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{2p_3} \end{pmatrix}$$

$$h^{ij} =: \begin{pmatrix} t^{-2p_1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-2p_2} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-2p_3} \end{pmatrix}$$

Para poder aplicar la formulación canónica, escojemos un parámetro entre los tres que aparecen. Sin embargo, lo más conveniente para trabajar es parametrizar el círculo de Kasner; esto se puede hacer de varias formas, entre ellas la parametrización de Khalatnikov-Lifchitz, que es conveniente a la hora de hacer el análogo Kasner-Bianchi tipo I [3, 6], y una parametrización angular más directa, trabajada por Sibjorn Hervik en un artículo reciente [13].

## 5.1. Parametrización de Khalatnikov-Lifchitz

Una de las parametrizaciones mas conocidas es la de Khalatnikov-Lifchitz, que tiene la forma:

$$p_1 = \frac{-u}{p_u}$$

$$p_2 = \frac{u+1}{p_u}$$

$$p_3 = \frac{u(u+1)}{p_u}$$

$$p_u = u^2 + u + 1$$

La evolución de cada exponente en función de este parámetro está en la figura 5. A medida que $u$ crece, dos de las direcciones se contraen y una se expande: ésto da cuenta de la anisotropía. Aquí $u$ varía en el rango $[0, \infty)$. Veremos que al escribir la métrica de Kasner de esta forma, las ecuaciones resultan ser mas bien sencillas. Como lo que queremos es obtener el lagrangiano, calculamos primero las componentes de la curvatura extrínseca:

$$K_{11} = -t^{2p_1(u)}\big[\big(-\frac{\dot{u}}{p_u} + \frac{u}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t - \frac{u}{p_u t}\big]$$

$$K_{22} = -t^{2p_2(u)}\big[\big(\frac{\dot{u}}{p_u} - \frac{u+1}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t + \frac{u+1}{p_u t}\big]$$

$$K_{33} = -t^{2p_3(u)}\big[\big(\frac{\dot{u}(2u+1)}{p_u} - \frac{u(u+1)}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t + \frac{u(u+1)}{p_u t}\big]$$

$$K_{11} = -t^{-2p_1(u)}\big[\big(-\frac{\dot{u}}{p_u} + \frac{u}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t - \frac{u}{p_u t}\big]$$

$$K_{22} = -t^{-2p_2(u)}\big[\big(\frac{\dot{u}}{p_u} - \frac{u+1}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t + \frac{u+1}{p_u t}\big]$$

$$K_{33} = -t^{-2p_3(u)}\big[\big(\frac{\dot{u}(2u+1)}{p_u} - \frac{u(u+1)}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t + \frac{u(u+1)}{p_u t}\big]$$

$$K_1^1 = -\big(-\frac{\dot{u}}{p_u} + \frac{u}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t + \frac{u}{p_u t}$$

$$K_2^2 = -\big(\frac{\dot{u}}{p_u} - \frac{u+1}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t - \frac{u+1}{p_u t}$$

$$K_3^3 = -\big(\frac{\dot{u}(2u+1)}{p_u} - \frac{u(u+1)}{p_u^2}\dot{p}_u\big)\ln t - \frac{u(u+1)}{p_u t}$$

A pesar de lo complejo de estas expresiones, lo que se obtiene para el escalar de curvatura es:

$$\mathbf{R} = \ln^2 t\,\frac{2\dot{u}^2}{p_u^2} + {}^3\mathbf{R}$$

Pero como $u$ sólo depende del tiempo, el escalar de curvatura en tres dimensiones es cero[1]. Con lo anterior, tenemos el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{t}{16\pi G}\ln^2 t\frac{\dot{u}^2}{(u^2+u+1)^2}$$

Teniendo en cuenta que $h = \det[h_{ij}] = t^2$. Con el lagrangiano, estamos en capacidad de hallar $\pi_u$:

$$\pi_u = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{u}} = -\frac{t}{8\pi G}\ln^2 t\frac{\dot{u}}{p_u^2}$$

$$\rightarrow \dot{u} = \frac{8\pi G p_u^2\pi_u}{t\ln^2 t}$$

Y ahora ya podemos encontrar el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \pi_u\dot{u} - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{4\pi G}{t\ln^2 t}(u^2+u+1)^2\pi_u^2$$

Vemos que en $t = 0$ hay una singularidad esencial. Ahora, para $t > 0$, cuantizamos según $\pi_u \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial u}$, y llegamos a[2]:

$$\mathcal{H}\psi[u] = 0$$

$$\frac{1}{t\ln^2 t}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi[u] = 0 \tag{5.1}$$

Para la función de onda del universo. Vemos que en $t = 0$ hay una singularidad esencial que es más bien problemática. Más adelante volveremos a hablar sobre este asunto. La solución a (5.1) para $t > 0$ es:

$$\psi(u) = Au + B$$

Ahora veremos lo que pasa cuando se trabaja con la

## 5.2. Parametrización angular (Hervik)

La forma más lógica de parametrizar un círculo, es angularmente. Una parametrización cómoda fue desarrollada por Sibjorn Hervik para hacer un estudio del modelo de minisuperespacio de Bianchi tipo I [13]. La parametrización va así:

$$p_1 = \frac{1}{3}(1+2\cos\gamma)$$

$$p_2 = \frac{1}{3}(1+2\cos(\gamma-\tfrac{2}{3}\pi))$$

[1]Si esto no ocurre, es porque el modelo de Kasner es inhomogéneo.

[2]$u$ es una función Real del tiempo, por lo que $p_u$ no se anula.

$$p_3 = \frac{1}{3}(1 + 2\cos(\gamma + \tfrac{2}{3}\pi))$$

Con $\gamma$ variando en el intervalo $[0, 2\pi)$; vemos que este intervalo es isomorfo al intervalo en el cual varía $u$ de la parametrización Khalatnikov-Lifchitz, por lo cual es posible demostrar que las dos parametrizaciones son equivalentes. Vemos en la figura 5.3 que cuando uno de estos $p_i$ es máximo, los otros son cero, indicando el mismo comportamiento de la parametrización de Khalatnikov-Lifchitz, con la diferencia que este modelo puede ser periódico, y el universo primordial pudo haber estado en un proceso de contracción y expansión en todas sus direcciones, hasta que dominó la expansión global [3].
Ahora, calculamos las componentes de la curvatura extrínseca[3]:

$$K_{11} = -t^{2p_1}(\dot{p_1}\ln t + \frac{p_1}{t}) \qquad K^{11} = -t^{-2p_1}(\dot{p_1}\ln t + \frac{p_1}{t})$$

$$K_{22} = -t^{2p_2}(\dot{p_2}\ln t + \frac{p_2}{t}) \qquad K^{22} = -t^{-2p_2}(\dot{p_2}\ln t + \frac{p_2}{t})$$

$$K_{33} = -t^{2p_3}(\dot{p_3}\ln t + \frac{p_3}{t}) \qquad K^{33} = -t^{-2p_3}(\dot{p_3}\ln t + \frac{p_3}{t})$$

$$K_1^1 = -(\dot{p_1}\ln t + \frac{p_1}{t})$$

$$K_2^2 = -(\dot{p_2}\ln t + \frac{p_2}{t})$$

$$K_3^3 = -(\dot{p_3}\ln t + \frac{p_3}{t})$$

Vemos que:

$$Tr(K) = -[(\dot{p_1} + \dot{p_2} + \dot{p_3})\ln t + \frac{1}{t}] = -\frac{1}{t}$$

Gracias a las condiciones sobre los $p_i$. Y, en general:

$$K_{ij}K^{ij} = \ln^2 t(\dot{p_1}^2 + \dot{p_2}^2 + \dot{p_3}^2) + \frac{2\ln t}{t}(p_1\dot{p_1} + p_2\dot{p_2} + p_3\dot{p_3}) + \frac{1}{t^2}$$

Pero como:

$$\frac{d}{dt}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2p_1\dot{p_1} + 2p_2\dot{p_2} + 2p_3\dot{p_3} = 0$$

Tenemos:

$$\mathbf{R} = K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3\mathbf{R} = \ln^2 t(\dot{p_1}^2 + \dot{p_2}^2 + \dot{p_3}^2)$$

Esta es la expresión más general que podemos obtener para cualquier parametrización. Ahora, lo que obtendremos en el caso particular (angular), es:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3}\ln^2 t\dot{\gamma}^2$$

[3]En este caso seremos más generales, por razones de espacio y para ver que el procedimiento se puede tomar estándarizado para cualquier parametrización.

Con lo cual el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = -\frac{t}{16\pi G}\frac{\ln^2 t}{3}\dot{\gamma}^2$$

Podemos calcular el momento conjugado a la variable angular $\gamma$:

$$\pi_\gamma = -\frac{t}{8\pi G}\frac{\ln^2 t}{3}\dot{\gamma}$$

Sustituimos en la fórmula para el hamiltoniano, y llegamos a:

$$\mathcal{H} = -\frac{24\pi G}{t\ln^2 t}\pi_\gamma^2 + \frac{12\pi G}{t\ln^2 t}\pi_\gamma^2$$

$$\mathcal{H} = -\frac{12\pi G}{t\ln^2 t}\pi_\gamma^2$$

Cuantizamos y vemos que la ecuación de Wheeler DeWitt para la parametrización angular de la métrica de Kasner es:

$$\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\psi[\gamma] = 0 \tag{5.2}$$

Siempre y cuando se cumpla la condición $t > 0$. Vemos que pasa lo mismo que en la parametrización KL[4], mostrando que ambas parametrizaciones son equivalentes. Además que tienen la misma solución y el mismo comportamiento, por lo que el análisis que se hará a continuación vale para cualquiera de las dos parametrizaciones.

## 5.3. Análisis de la función de onda

La solución de la ecuación de Wheeler DeWitt para ambas parametrizaciones es:

$$\psi_{KL} = Au + B$$

$$\psi_{ang} = C\gamma + D$$

La función de onda de Khalatnikov Lifchitz favorece un universo primordial con alta anisotropía, pues es proporcional a $u$, y el efecto de aumentar $u$ como vemos en la figura 2 es tener una contracción de dos ejes y una dilatación del otro[5]. En cambio con la parametrización angular no tenemos información respecto a que universo obtendremos, pues el hecho que $\gamma$ crezca no dice nada sobre la métrica, que es periódica en $\gamma$. Si reducimos el rango de $\gamma$ para no tener un universo que pasa por ciclos de expansión y contracción en una dirección, llegamos a que se favorece un universo con un eje totalmente expandido y los otros dos ejes contraídos hasta su estado natural, es decir a $g_{22} = g_{33} = 1$. Además podemos

[4]Khalatnikov-Lifchitz

[5]Es evidente que esta solución no es de cuadrado integrable.

encontrar que gracias al rango reducido, la función de onda que resulta de la parametrización angular es de cuadrado integrable. Sin embargo, gracias a la probabilidad que es cuadrática en el parámetro, no podemos precedir cual sería el estado inicial de anisotropía del universo, pues la probabilidad no define absolutamente el sistema.
Lamentablemente la ecuación de Wheeler DeWitt para ambas parametrizaciones, nos dice que no ganamos nada con la descomposición de Dirac, ya que la densidad conservada que obtendríamos sería un número aleatorio, sin contenido físico. Si se colocara la constante cosmológica para obtener una buena ecuación de conservación, como en el caso de Friedmann Robertson Walker, tendríamos los problemas que hemos evitado al tomar la validez de la ecuaciones en Kasner a partir de $t > 0$, pues aparecería un término explícito del tiempo, que es inadmisible en la teoría. Con esto podemos concluir que el modelo de Kasner no se puede tratar en el régimen de Cosmología cuántica, sino como una aproximación del modelo de Bianchi tipo I por fuera del tiempo de Planck. Además la evolución estaría mal descrita, pues no permite un término de energía del vacío para explicar el mecanismo de inflación. Es por esto que el modelo de Bianchi tipo I es más adecuado que el modelo de Kasner para tratar el problema de la anisotropía en el universo primordial.

La densidad de probabilidad, fijando las constantes $B, D$ a cero por no tener mucha relevancia en el análisis general, se calcula que es:

$$\rho = |A|^2 u^2$$

y de forma similar para $\gamma$. En el caso KL, ésta probabilidad favorece un universo con máxima anisotropía en un eje, y ninguna en los otros dos. En el caso angular $\rho$ favorece la misma situación, pero como vemos en la figuras 5.3, la distribución de los parámetros produce un universo que tiene más posibilidades de tener anisotropía en los tres ejes, ya que esta situación se repite tres veces en el dominio de $\gamma$, mientras que en el caso KL ésto solo ocurre una vez (Figura 5.2). La relación de probabilidad (*anisot. en 3 ejes*)/(*anisot. en 1 eje*) en el caso angular es aproximadamente $3/4$, mientras que en el caso KL es cero. Evidentemente un universo tipo Angular tiene más probabilidad de tener distintas distribuciones axiales de anisotropías que uno tipo KL.

.

# Capítulo 6

# Cuantización en los modelos de Bianchi I y II

La idea de este trabajo surgió de un trabajo previo de Yamazaki, en el cual se cuantiza canónicamente elespacio tiempo generado por los modelos cosmológicos de Bianchi, y luego se descompone la ecuación de Wheeler DeWitt resultante según el formalismo DSR. En ese trabajo [25] se halló la ecuación de continuidad asociada a la función de onda que aparece, pero no se hace un análisis riguroso de la densidad de probabilidad, y los cálculos necesarios para llegar a las ecuaciones no aparecen reproducidos. En este trabajo dichos cálculos si se mostrar'an, y se analizarán las densidades obtenidas para cada modelo.
Como lo que se obtiene para tipos distintos de los dos primeros complica mucho las cosas, sólo se mostrarán aquí los cálculos y los resultados de los dos primeros; en particular ilustran satisfactoriamente el comportamiento de anisotropías en el universo.

## 6.1. Bianchi Tipo I

Expresemos la métrica para el modelo cosmológico de Bianchi tipo I según la distribución de 1-formas en el capítulo 2:

$$\begin{aligned} ds^2 = -N^2dt^2 + e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}dx^1dx^1 \\ + e^{2(\alpha+\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)}dx^2dx^2 + e^{2(\alpha-2\beta_-)}dx^3dx^3 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Siendo el modelo más sencillo, vemos que esta métrica no es fácil de manejar, gracias a la distribución de los parámetros dentro de $g_{\mu\nu}$. Ahora, como en los capítulos anteriores, debemos encontrar el escalar de curvatura, el lagrangiano, etc. para poder llegar a los resultados que queremos.

$$\mathbf{R} = K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3\mathbf{R}$$

Calculamos las componentes de la curvatura extrínseca, y obtenemos:

$$K_{11} = \frac{-1}{2N}\big(2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_+ + \sqrt{3}\dot{\beta}_-)e^{2(\alpha+\beta_+ +\beta_-)}\big)$$

$$K_{22} = \frac{-1}{2N}\big(2(\dot{\alpha} + \dot{\beta}_+ - \sqrt{3}\dot{\beta}_-)e^{2(\alpha+\beta_+ -\beta_-)}\big)$$

$$K_{33} = \frac{-1}{2N}\big(2(\dot{\alpha} - 2\dot{\beta}_+)e^{2(\alpha-2\beta_+)}\big)$$

Con $h = e^{6\alpha}$ podemos calcular las siguientes cantidades, que nos llevan al escalar de curvatura:

$$K_{ij}K^{ij} = \frac{1}{N^2}(3\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\beta}_+^2 + 6\dot{\beta}_-^2)$$

$$K^2 = 9\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2}$$

Por lo cual el lagrangiano queda escrito de la forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{6}{N}\frac{1}{16\pi G}e^{3\alpha}(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) - \frac{N}{16\pi G}e^{3\alpha}\,{}^3\mathbf{R}$$

Como $\alpha$, $\beta_+$ y $\beta_-$ no dependen de la posición, tenemos que cada hipersuperficie de tiempo constante es un espacio plano, por lo cual el escalar de curvatura en tres dimensiones se anula. Ahora podemos calcular los momentos conjugados a cada variable canónica:

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{12}{16\pi G}\frac{e^{3\alpha}}{N}\dot{\alpha}$$

$$\pi_{\beta_+} = -\frac{12}{16\pi G}\frac{e^{3\beta_+}}{N}\dot{\beta}_+$$

$$\pi_{\beta_-} = -\frac{12}{16\pi G}\frac{e^{3\beta_-}}{N}\dot{\beta}_-$$

De estas expresiones despejamos las derivadas temporales de las variables canónicas y obtenemos la siguiente expresión para el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{2}{3}\pi G N e^{-3\alpha}\big(-\pi_\alpha^2 + \pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2\big)$$

Y podemos encontrar el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha\dot{\alpha} + \pi_{\beta_+}\dot{\beta}_+ + \pi_{\beta_-}\dot{\beta}_- - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{2}{3}\pi G N e^{-3\alpha}\big(-\pi_\alpha^2 + \pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2\big)$$

Vemos que se puede escribir como $\mathcal{H} = N\mathcal{H}_N$, así como en la deducción de la ecuación general de Wheeler DeWitt. Gracias a esto podemos llegar a la restricción $\mathcal{H}_N = 0$, que la hacemos actuar sobre una función de onda en el régimen cuántico. Para hacer esto, cuantizamos canónicamente según el método de conmutadores de Dirac:

$$[\beta_a, \pi_b] = i\delta_{ab} \qquad a, b = +, -$$

$$[\beta_a, \pi_\alpha] = 0 \qquad a = +, -$$

$$[\alpha, \pi_\alpha] = i$$

Estas relaciones pueden ser satisfechas si escogemos:

$$\pi_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\alpha} \qquad \pi_{\beta_+} = -i\frac{\partial}{\partial\beta_+} \qquad \pi_{\beta_-} = i\frac{\partial}{\partial\beta_-}$$

Y llegamos entonces a:

$$(-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta_-^2})\psi[\alpha, \beta_+, \beta_+] = 0 \tag{6.2}$$

Esta es la ecuación de Wheeler DeWitt para el modelo de Bianchi tipo I. Vemos que tenemos una ecuación como de partícula libre, gracias a que el espacio generado por esta métrica, si bien es anisotrópico, es plano, y la evolución de este modelo será similar a la evolución del modelo de Kasner, según se vio en el capítulo 2.

### 6.1.1. Descomposición de Dirac

Ahora vamos a hacer la descomposición, obteniendo un hamiltoniano $\mathcal{H}_D$, con el cual se debe volver a obtener la ecuación (6.2). Si escribimos el hamiltoniano factorizado de la forma [25]:

$$\mathcal{H}_D = \pi_\alpha + \sigma_1\pi_{\beta_+} + \sigma_2\pi_{\beta_-}$$

Aquí $\sigma_i$ son matrices 2×2. Al exigirle a este hamiltoniano que produzca el hamiltoniano de Wheeler DeWitt al ser elevado al cuadrado, obtenemos:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Con estas matrices cuantizamos y llegamos a la ecuación de Dirac Wheeler DeWitt:

$$[\hat{\pi}_\alpha + \sigma_1\hat{\pi}_{\beta_+} + \sigma_2\hat{\pi}_{\beta_-}]\underline{\psi}[\alpha, \beta_+, \beta_-] = 0 \tag{6.3}$$

Con $\underline{\psi}$ una función de onda espinorial de dos componentes. La solución a la ecuación anterior se halla por medio de un Ansatz de onda plana:

$$\underline{\psi} = e^{i(k_+\beta_+ + k_-\beta_- - \omega\alpha)}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Donde $\omega, k_\pm$ son constantes reales que están dadas cuando sustituimos en (6.3). $\psi_i$ son constantes de movimiento que se definen cuando fijamos condiciones de frontera.

$$\psi_1 = \frac{k_+ - ik_-}{\omega}\psi_2 \qquad \psi_2 = \frac{k_+ + ik_-}{\omega}\psi_1$$

Lo cual nos dice que $|\psi_1| = |\psi_2|$; además obtenemos una relación de dispersión:

$$\omega = \pm\sqrt{k_+^2 + k_-^2}$$

Como estos parámetros no han sido discretizados en la cuantización, podemos decir que varían continuamente. Entonces la solución queda de la forma:

$$\underline{\psi} = |\psi_1| e^{i(k_+\beta_+ + k_-\beta_- - \omega(k_+,k_-)\alpha)} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Con $\delta$ una fase real arbitraria.

Antes de proceder al análisis de esta solución, haremos un paréntesis para hablar de la ecuación de continuidad y la definición de las densidades y las corrientes de probabilidad.

### 6.1.2. Cuestiones de continuidad

Recordamos la ecuación (6.3) y la escribimos en términos de los operadores $\pi$ ya cuantizados, esto es:

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - i\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\beta_+} - i\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta_-} = 0 \tag{6.6}$$

Se entiende que, por conveniencia, $\psi = \underline{\psi}$ de la sección anterior (sólo en notación). Ahora, si tomamos (6.6) y premultiplicamos por el adjunto del espinor $\psi^\dagger$, tenemos:

$$-i\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - i\psi^\dagger\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\beta_+} - i\psi^\dagger\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta_-} = 0 \tag{6.7}$$

Ahora, tomando la adjunta de (6.6), obtenemos:

$$i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\beta_+} + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\beta_-} = 0$$

Y multiplicamos por $\psi$ al lado derecho:

$$i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\alpha}\psi + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\beta_+}\sigma_1\psi + i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial\beta_-}\sigma_2\psi = 0 \tag{6.8}$$

Si restamos (6.7) de (6.8), llegamos a:

$$\frac{\partial\psi^\dagger\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi^\dagger\sigma_1\psi}{\partial\beta_+} + \frac{\partial\psi^\dagger\sigma_2\psi}{\partial\beta_-} = 0$$

Esta ecuación tiene mucha cara de ser una ecuación de continuidad, sólo falta ponerle nombres a las cantidades que aparecen:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \qquad j_+ = \psi^\dagger \sigma_1 \psi \qquad j_- = \psi^\dagger \sigma_2 \psi$$

Que son la densidad de probabilidad y las corrientes anisotrópicas de probabilidad. Anisotrópicas porque aparecen gracias a $\beta_\pm$, e indican cómo cambia la probabilidad según las anisotropías de la métrica. Ahora sí podemos escribir la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial j_+}{\partial \beta_+} + \frac{\partial j_-}{\partial \beta_-} = 0 \tag{6.9}$$

Por la forma de la expresión de la densidad, vemos que está definida positiva, tal como esperábamos según el procedimiento DSR.

### 6.1.3. Análisis de la función de onda y las densidades

Con la solución (6.5) podemos calcular la forma de las densidades obtenidas en la sección anterior, reemplazando la función de onda en:

$$\rho = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

$$j_+ = \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2 \qquad j_- = i\psi_2^* \psi_1 - i\psi_1^* \psi_2$$

Es decir, tenemos que en este caso ni la densidad de probabilidad ni las corrientes anisotrópicas dependen de los parámetros $\alpha, \beta_\pm$, sino que se mantienen constantes a partir de las condiciones iniciales (Big Bang):

$$\rho = 2|\psi_1|^2$$

$$j_+ = 2|\psi_1|^2 \cos\delta$$

$$j_- = 2|\psi_1|^2 \sin\delta$$

En la figura 5.1 se graficaron estas cantidades en función de la condición inicial $\delta$. Ya que hemos hallado la densidad de probabilidad, podemos comprobar si la función de onda es de cuadrado integrable, es decir, si la probabilidad se conserva durante la evolución de $\alpha$ (expansión). Lo que hacemos es integrar sobre $\beta_\pm$:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_+ d\beta_- \rho[\alpha, \beta_+, \beta_-] = 2|\psi_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_+ d\beta_-$$

Vemos que esta integral no converge y por lo tanto en este modelo no se conserva la probabilidad. El cálculo que se hizo para la ecuación de continuidad se puede generalizar para todos los modelos Bianchi clase A, escogiendo adecuadamente la densidad y las corrientes de probabilidad. Yamazaki [25] cita puntualmente el problema de la positividad de la densidad de probabilidad que aparece en la ecuación de Wheeler DeWitt para Bianchi, sin aplicar el método DSR, al plantear la densidad de probabilidad como de Klein Gordon, con $t \to \alpha$:

$$\rho_{KG} \sim \rho_\alpha \frac{i}{2}\Big(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \alpha}\Big)$$

Se ha reportado que esta densidad de probabilidad es negativa para algunos valores de $\alpha$. Como veremos en la siguiente sección, y en general las densidades que se obtienen por el método DSR, siempre son positivas, porque el modelo se construye con este fin.

## 6.2. Bianchi tipo II

La métrica de Bianchi tipo II está dada por la siguiente expresión[1]:

$$\begin{aligned} ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}\Big(dx^1dx^1 - 2x^3dx^1dx^2 + (x^3)^2dx^2dx^2\Big) \\ + e^{2(\alpha+\beta_+ \sqrt{3}\beta_-)}dx^2dx^2 + e^{2(\alpha-2\beta_+)}dx^3dx^3 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Vemos que esta métrica es bien extraña, ya que aparece la coordenada $x^3$ explícitamente, avisándonos que cada hoja de espacio descrita por esta métrica no es plana. Ahora expresemos matricialmente la 3-métrica generada:

$$h_{ij} =: \begin{pmatrix} e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} & -e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}x^3 & 0 \\ -e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}x^3 & e^{2(\alpha+\beta_+)}(e^{-\sqrt{3}\beta_-} + e^{\sqrt{3}\beta_-}(x^3)^2) & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(\alpha-2\beta_+)} \end{pmatrix}$$

Con $h = e^{6\alpha}$ el determinante de $h_{ij}$. Por conveniencia, usaremos la siguiente notación:

$$\gamma_1 = e^{2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)}; \qquad \gamma_2 = e^{2(\alpha+\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)}$$
$$\gamma_3 = e^{2(\alpha-2\beta_+)}$$

Y podemos escribir:

$$h^{ij} =: \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}(x^3)^2 & x^3\gamma_2^{-1} & 0 \\ x^3\gamma_2^{-1} & \gamma_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, calculamos **K**:

$$K_{11} = -\frac{1}{N}(\dot\alpha + \dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-)\gamma_1$$

$$K_{22} = -\frac{1}{N}[(\dot\alpha + \dot\beta_+ - \sqrt{3}\dot\beta_-)\gamma_2 + (x^3)^2(\dot\alpha + \dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-)\gamma_1]$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{x^3}{N}(\dot\alpha + \dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-)\gamma_1$$

[1]Gracias a la distribución de 1-formas dada en el capítulo 2

$$K_{33} = -\frac{1}{N}(\dot{\alpha} - 2\dot{\beta}_+)\gamma_3$$

Con esto encontramos:

$$K_{ij}K^{ij} - K^2 = \frac{1}{N^2}[(\dot{\alpha}+\dot{\beta}_+ + \sqrt{3}\dot{\beta}_-)^2 + (\dot{\alpha}+\dot{\beta}_+ - \sqrt{3}\dot{\beta}_-)^2 + (\dot{\alpha}-2\dot{\beta}_+)^2] - \frac{9}{N^2}\dot{\alpha}^2$$

Ahora podemos hallar el escalar de curvatura y por lo tanto el lagrangiano [25]:

$$\mathcal{L} = -\frac{6}{N}\frac{1}{16\pi G}e^{3\alpha}(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2) - \frac{N}{16\pi G}e^{3\alpha}\,{}^3\mathbf{R}$$

A partir del cual obtenemos el hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha\dot{\alpha} + \pi_{\beta_+}\dot{\beta}_+ + \pi_{\beta_-}\dot{\beta}_- - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = -\pi_\alpha^2 + \pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2 - e^{6\alpha}\,{}^3\mathbf{R}/6$$

Al aplicar la restricción $\mathcal{H} = 0$, llegamos a la ecuación de Wheeler DeWitt[2]:

$$\left(-\pi_\alpha^2 + \pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2 - e^{6\alpha}\,{}^3\mathbf{R}/6\right)\psi = 0 \tag{6.11}$$

Y más explícitamente, calculando el escalar de curvatura en 3 dimensiones:

$${}^3\mathbf{R} = -2e^{-2\alpha+4\beta_+ +4\sqrt{3}\beta_-}$$

$$\left(-\pi_\alpha^2 + \pi_{\beta_+}^2 + \pi_{\beta_-}^2 + \frac{1}{3}e^{4\alpha+4\beta_+ +4\sqrt{3}\beta_-}\right)\psi = 0 \tag{6.12}$$

### 6.2.1. Descomposición de Dirac

El hamiltoniano de Dirac Wheeler DeWitt, queda de la forma [25]:

$$\mathcal{H}_D = \pi_\alpha + \sigma_1\pi_{\beta_+} + \sigma_2\pi_{\beta_-} + \sigma_3\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}$$

Así como se ha hecho antes, podemos encontrar estas matrices con la relación $\mathcal{H}_D^2 = \mathcal{H}$. Al hacer esto, llegamo a que $\sigma_{1,2}$ son las mismas que encontramos en la sección anterior, y en añadidura:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que las matrices $\sigma$ son las matrices de Pauli, tan conocidas en mecánica cuántica. Las hallamos aquí gracias a que los modelos de Bianchi se obtienen a partir de consideraciones de simetría sobre el E-T. Con lo anterior escribimos la ecuación DWD para el modelo de Bianchi tipo II:

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - i\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial\beta_+} - i\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial\beta_+} + \sigma_3\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}\psi = 0 \tag{6.13}$$

[2]Vale la pena recordar que en este punto $\pi_{()} \to -i\frac{\partial}{\partial()}$, es decir los momentos actúan como operadores.

Teniendo en cuenta que la función de onda se descompone de forma espinorial en dos componentes $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, escribimos la ecuación (6.13) en componentes:

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}\psi_1 + i\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_+} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_-} = 0 \tag{6.14a}$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_+} - \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_-} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}\psi_2 = 0 \tag{6.14b}$$

Escojemos un Ansatz de la siguiente forma [25]:

$$\psi = e^{-\frac{1}{6}\exp[2(\alpha+\beta_+ +\sqrt{3}\beta_-)]}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Con $\psi_i$ constantes dadas por las condiciones iniciales. Al sustituir el Ansatz en (6.14), llegamos a la restricción $\psi_1 = -\psi_2$. Como vemos de (6.13), en el límite $\alpha \to \infty$, regresamos a (6.3) es decir, a Bianchi tipo I. Esto es porque este límite es equivalente a $R$ (factor de escala en RW) tendiendo a cero, esto es, a la singularidad inicial. La evolución a partir de esta singularidad se modela como la evolución de un espacio plano, dependiendo de los parámetros, en este caso los de anisotropía. Por esto, en ese límite la solución también tiene que tender a la solución para el modelo de Bianchi tipo I; esto lo podemos plasmar de la siguiente forma:

$$\psi = e^{i(k_+\beta_+ + k_-\beta_- - \omega\alpha)}e^{-\frac{1}{6}\exp[2(\alpha+\beta_+ +\sqrt{3}\beta_-)]}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Al sustituir esta solución en las ecuaciones (6.14), llegamos a las siguientes condiciones sobre $k_\pm, \omega$:

$$\begin{pmatrix}-\omega & k_+ - ik_-\\ k_+ + ik_- & -\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_1\end{pmatrix}$$

Que hacen que:

$$k_+ = -\omega; \qquad k_- = 0 \tag{6.16}$$

Reescribiendo la solución, tenemos:

$$\psi = e^{-i\omega(\alpha+\beta_+)}e^{-\frac{1}{6}\exp[2(\alpha+\beta_+ +\sqrt{3}\beta_-)]}\begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_1\end{pmatrix}$$

Ahora podemos pasar al estudio de las densidades de probabilidad.

### 6.2.2. Análisis de las densidades de probabilidad

La única diferencia entre el procedimiento que tenemos que llevar aquí para encontrar una ecuación de continuidad y el procedimiento de la sección 6.1.2 es un término $\sigma_3\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}$. Si tomamos:

$$\sigma_3\frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\alpha+2\beta_+ +2\sqrt{3}\beta_-}\psi \tag{6.17}$$

Y premultiplicamos por $\psi^\dagger$, obtenemos:

$$\psi^\dagger \sigma_3 \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2\alpha+2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\psi \tag{6.18}$$

Esto es lo mismo que lo que hallamos si tomamos la adjunta de (6.17):

$$\psi^\dagger \sigma_3 \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2\alpha+2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-} \tag{6.19}$$

Y multiplicamos por $\psi$ al lado derecho. Esto fue lo que se hizo con los otros términos para hallar la ecuación de continuidad y dado que al restar, el término de $\sigma_3$ se anula, la ecuación de continuidad para el modelo de Bianchi tipo II es la misma ecuación (6.9):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial j_+}{\partial \beta_+} + \frac{\partial j_-}{\partial \beta_-} = 0$$

La densidad de probabilidad $\psi^\dagger\psi$ se calcula:

$$\rho = |\psi_1|^2 e^{-\frac{1}{3}\exp[2(\alpha+\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)]} \tag{6.20}$$

Vemos que en el límite $\alpha \to \infty$ la densidad se vuelve $|\psi_1|^2$, como en Bianchi I. Además vemos que esta densidad siempre toma valores finitos; cuando $\beta_\pm \to \infty$, $\rho = 0$ y cuando $\beta_\pm \to -\infty$, $\rho \to |\psi_1|^2$. Es evidente que la densidad toma siempre valores positivos y que está acotada, pero la integral de probabilidad de $\rho$ no converge gracias a que sólo en un cuadrante la función densidad tiende a cero en el infinito. Esto nos dice, como en el caso anterior que si bien la probabilidad se conserva, no se puede calcular a menos que se aplique algun método de normalización. En la figura 5.2 vemos una gráfica de la densidad en función de $\beta_\pm$ con $\alpha$ constante, en donde se ve que en el cuadrante I la función es de cuadrado integrable, pero hacia $-\infty$ la función toma el valor constante 1. Actualmente no hemos llegado a un método para regularizar esta función, o para explicar la necesidad de tener funciones 2-integrables.
Si calculamos las corrientes de probabilidad, obtenemos:

$$j_+ = -\rho \qquad j_- = 0$$

Se mantiene la ecuación de probabilidad y además vemos que la corriente sólo fluye en sentido $\beta_+$, según se ve en la condición (6.16).

.

# Capítulo 7

# Discusión Final

Algunos problemas fundamentales que se presentan en la ecuación de Wheeler DeWitt, que debemos mencionar para dar completez son los siguientes: El ordenamiento de los operadores a la hora de cuantizar, es arbitrario y en particular el que se usa en la ecuación general de Wheeler DeWitt no es necesariamente el correcto. Una alternativa en el caso general, es tomar la métrica $G_{ijkl}$ del superespacio, y construir una laplaciano invariante, del tipo $\pi_{ij}\pi^{ij}$ de modo que independientemente de las coordenadas tengamos la misma ecuación. Lamentablemente en minisuperespacios no podemos hacer lo mismo por la falta de una métrica global.

Otro problema que se presenta es que la ecuación tiene operadores funcionales evaluados en el mismo punto de la hipersuperficie $\Sigma$, que pueden producir singularidades tipo $\delta(0)$ dentro de la integral de camino, en la cual se suma sobre todas las posibilidades. A pesar de ser un problema fundamental, no se transmite en el modelo de minisuperespacio en el cual los grados de libertad son finitos [2].

El principal problema es el del tiempo. No podemos definir explícitamente el tiempo dentro de la teoría sin romper las definiciones que se usan para la descomposición (3+1), ya que la 3-métrica no puede depender explícitamente del tiempo. Esto lo vimos en el capítulo 5 en donde la cuantización en el modelo de Kasner, cuya métrica tiene el tiempo explícito, es dificil de llevar, y a menos que sea en un modelo simple no puede haber cuantización. Esto se debe a que si la variedad es globalmente hiperbólica tiene que permitir una descomposición 3+1; si alteramos un poco la estructura de la variedad (como con la constante cosmológica) la descomposición ya no se puede hacer.

En el modelo de Friedmann Robertson Walker, que es el que mejor resultados da, el tiempo no aparece explícitamente, porque el modelo está bien construido; entonces ¿cómo habla uno de evolución temporal del modelo, si no podemos usar el tiempo? y más importante aun, ¿como es que el tiempo sí existe, en aparente contradicción con este formalismo? Primero revisemos la forma general de la métrica ADM. La forma de construir el tiempo propio es relacionándolo con el tiempo cosmológico por medio de la función lapso. Entonces, en principio no podemos medir el tiempo cosmológico porque siempre que pretendamos encontrar una función lapso, podremos reescalar el tiempo propio, de modo que el paso del tiempo cosmológico siempre estará escondido de cualquier observador sobre la variedad. Esto nos lleva a una condición intuitiva (pero muy poderosa) sobre la teoría: es necesario que el tiempo cosmológico esté escondido de todos los observadores, para que los parámetros cosmológicos determinen la evolución del universo dentro de sí mismo, sin tener nada que ver con el resto de Universos dentro del superespacio.

En [15] hay una propuesta para incluir el tiempo dentro de la teoría como parámetro de evolución, pero el tiempo no es el cosmológico, sino que es reemplazado por uno de los parámetros (factor de escala, anisotropía) y hace que la ecuación de Wheeler DeWitt parezca una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, tomando la raíz cuadrada de la ecuación y forzando la evolución sin tener en cuenta el formalismo DSR. Otra forma aun menos adecuada para tener en cuenta el tiempo fue propuesta por Mongan [29]: toma el potencial que aparece en la ecuación de Friedmann Robertson Walker antes de cuantizar, y lo reemplaza dentro de la ecuación de Schr̈dinger. Evidentemente esa no es una forma adecuada para tratar el problema, y los resutados que obtiene son inconsecuentes con la interpretación física.

Sin embargo, es menos forzado y más adecuado tratar el problema desde la descomposición de Dirac, ya que las derivadas que aparecen son lineales en cada parámetro, haciendo que la ecuación de Dirac Wheeler DeWitt se parezca a la ecuación de Dirac en Teoría Cuántica de Campos. Es por esto que tenemos que en Cosmología Cuántica Canónica el rol del tiempo lo juega cada parámetro cosmológico, siempre y cuando la evolución no sea forzada; en nuestro universo actual sería el factor de escala el que representa el tiempo[1].

Claro que ésta no es la única propuesta dentro de la cosmología para la definición del tiempo, pues Hawking [10, 18] propuso que como la entropía aumenta con el tiempo, lo contrario también pasa: el signo del cambio de la entropía indica la dirección del tiempo. Además encuentra que la entropía aumenta con la evolución del factor de escala, y en concordancia con la condición de frontera que impone sobre la función de onda del universo que no elimina las soluciones de onda entrante, el universo llegaría a una etapa de máxima expansión y cuando el factor de escala comienza a reducirse, el cambio en la entropía cambia de signo y la flecha del tiempo apunta para atrás. Entonces, por más descabellado que suene, los hoyos negros se convertirían en estrellas, la radiación se aglomeraría dentro de implosiones de supernovas, y los muertos se levantan de sus tumbas y los vivos desaparecen dentro del vientre materno.

Lo que sí ocurre es que dependiendo de la función de onda (y por lo tanto de la condición de frontera), el paso del tiempo se mide de forma diferente, al menos después de llegar al momento de máxima expansión; que nunca seríamos capaces de detectar previamente, al desconocer si la solución inicial permite ondas entrantes o es como la de Vilenkin que sólo permite universos en eterna expansión.

[1]De hecho en el modelo RW, la solución más básica es $R = it$. Es como las rotaciones que se hacen en QFT, y no se altera el sentido del tiempo, pues en particular, $\sqrt{h}$ no varía.

La propuesta de Hawking está de acuerdo con el sentido cuántico de la teoría, ya que en caso que nuestro universo fuera uno periódico, en el cual hay ciclos de contracción e inflación, no seríamos capaces de distinguir en cuál ciclo estamos, porque en teoría cuántica somos incapaces de distinguir un estado de otro idéntico, entonces puede que no sea la primera vez que estamos aquí preguntándonos estas cosas, y no sería relevante preguntar en qué ciclo vamos.
En necesario decir otra cosa sobre la función de onda sobre su interpretación: ya que no aparece el tiempo explícitamente, el tratamiento de la ecuación de Wheeler DeWitt es análogo a la Mecánica Cuántica estacionaria, ya que el universo primordial escoge un estado dado por la función de onda y esa función no cambia durante la evolución, ya que es ésta la que dicta esa evolución. Entonces después del Big-Bang cada onda se congela, y su función asociada contiene la historia completa del universo hasta su final.
Independientemente de la condición de frontera que se escoja, ya no podemos tener un Big Crunch en el sentido de revertir el Big Bang, ya que después de ese rompimiento cada universo queda causalmente desconectado de cualquier otro: lo más apretado que puede volver a estar es si vuelve al punto inicial dentro de sí mismo, si eso es lo que predice la función de onda. Como en el modelo de Senovilla, en el cual el universo llega a un punto de máxima aglomeración y después se va a un estado de planitud; en caso que vuelva al estado inicial dependiendo de la condición de frontera, siempre volverá al estado de planitud, no al superespacio. Planteamos entonces un BIG-BANG antes del Big-Bang que es requerido por el modelo inflacionario, en el cual todos los grados de libertad de superespacio se desacoplan, y cada universo definido por su probabilidad cuántica, evoluciona de distinta forma (Figura I). Este BIG-BANG es el que no se puede volver a dar.

En el modelo de Robertson Walker vimos que las ecuaciones predicen dos tipos básicos de universo: uno en expansión infinita y uno que colapsa poco después de ser creado. Esto nos da una imagen de la restricción de este modelo, que como hemos dicho en el capítulo 2, o predice un universo lleno de desórdenes topológicos que hacen colapsar el universo, o que se expande hacia el infinito sin dar tiempo a la formación de estructuras. La poca validez de este modelo contrasta con los resultados que obtuvimos para el modelo de Friedmann Robertson Walker, de donde hallamos la oportunidad para aplicar las condiciones de frontera de Vilenkin, Linde y Hartle Hawking, ya que el modelo FRW produce un universo más acorde con la realidad que el sólo modelo RW. Otra cosa que es bastante conveniente es que la función de onda es de cuadrado integrable, lo cual nos dice que la probabilidad se conserva globalmente; esto es muy importante para garantizar que toda la información del universo está contenida dentro de la función de onda.
Esta condición salta el problema de no poder encontrar una ley de conservación dentro del formalismo DSR: la conservación está implícita dentro del modelo. Como el modelo más adecuado para explicar el universo actual es el inflacionario [19], los resultados que se obtengan (si la complejidad de las ecuaciones lo permite), serán más cercanos a la realidad de nuestro universo. Mallett [27] propuso

una forma de hacer la factorización de Dirac para el modelo inflacionario[2], pero su forma básica es diferente a la que se ha aplicado a lo largo de este trabajo, además no obtiene resultados concretos, sino que están en forma de ecuaciones autocontenidas, de las cuales no se puede sacar mucha información física. Sin embargo, con el modelo inflacionario tenemos la oportunidad de obtener una ley de conservación bien definida, que hable del balance entre las cantidades que dependen de $R$ y $\phi$, el campo escalar.

En los modelos de Bianchi, a pesar de no obtener conservación Global de probabilidad, sí tenemos una ley de conservación que nos da información acerca del flujo de las anisotropías, al menos en el modelo de Bianchi tipo II. Gracias a que la foliación que se hace en los modelos de Bianchi está bien construida, no tenemos problemas por las anisotropías, antes bien las ecuaciones de movimiento son bastante simétricas y consistentes con la naturaleza del modelo. Además los modelos de Bianchi admiten expansión del universo, aparte de las anisotropías, lo que hace que sea posible tener en cuenta la constante cosmológica y el modelo inflacionario. Sin embargo, a pesar de que armar un modelo estándar del universo con una métrica de Bianchi suena muy bien, lo más probable es que las ecuaciones sean tan complicadas que su solución sea casi inalcanzable.
Los modelos de Bianchi, gracias a su construcción *sui generis* describen muchas métricas, en particular la de Kasner, que no es muy manejable dentro de la Cosmología Cuántica, pero que su generalización en el modelo de Bianchi tipo I sí es bien comportada. El catálogo de Bianchi contiene muchas formas de métricas, algunas incluso no cosmológicas, de tal forma que los resultados se puedan generalizar a muchos modelos.

El problema con la métrica de Senovilla es con la inhomogeneidad del modelo. Gracias a ésto, aperecen términos no deseados que dependen de los parámetros cosmológicos, y que alteran la estructura de la factorización. Como demostramos en el capítulo 4, el hamiltoniano factorizado que aparece no es hermítico, lo cual es requerido para cualquier teoría cuántica. Es posible ser más estrictos con la hermiticidad, si definimos un producto interno con la integral de camino, y la hermiticidad requiere que el hamiltoniano anule la función de onda y su conjugada, dentro del producto interno. La condición de hermiticidad asegura que ciertos términos de superficie se desvanezcan en la frontera, evitándonos problemas de renormalización. Entonces si el hamiltoniano de Dirac Wheeler DeWitt no es hermítico, no podemos esperar obtener resultados adecuados a la realidad del modelo. Sin embargo, como hemos visto en los casos anteriores, la información que da la ecuación de Wheeler DeWitt acerca de la función de onda apunta un poco en la misma dirección que la de Dirac Wheeler DeWitt, por lo cual la solución de la primera ha de dar cierta información sobre el comportamiento del universo de Senovilla.

[2]De hecho Mallett es uno de los pocos que han aplicado la Descomposición de Dirac en la ecuación de Wheeler DeWitt.

Hemos visto que cada modelo tiene problemas según su naturaleza; pero a fin de cuentas la teoría de Wheeler DeWitt prueba no ser tan débil como parece a primera vista, ya que su capacidad predictiva no está en contra de la cosmología estándar, antes bien complementa y respalda los argumentos de validez que existen para cada modelo, en particular el inflacionario. Y la descomposición de Dirac, cuando se hace cuidadosamente es válida; además completa y repara algunos de los problemas más sencillos de interpretación física de la ecuación WD, como pudimos ver en el caso de la cosmología de Friedmann Robertson Walker, y en los modelos de Bianchi, en donde se obtienen resultados satisfactorios (aunque incompletos, por ahora). Además esta teoría cuenta con el argumento de *legitimidad*, pues esta forma de cuantizar la gravedad no ignora su carácter geométrico, como sí hacen otras teorías, como la de cuerdas; por lo anterior esperamos que debe haber alguna forma de erradicar los problemas de formulación que tiene la cuantización canónica de la gravedad.

## Conclusiones

Finalmente, puntualizaremos las conclusiones más importantes obtenidas a lo largo de este trabajo, para complementar el análisis del problema del tiempo y los resultados específicos para cada modelo cosmológico.

- Es posible usar la condición de integrabilidad como condición física sobre la función de onda global.
- Se halla una ley de conservación asociada al formalismo DSR para cada modelo, siempre y cuando esté bien formulado.
- Siempre es posible definir una densidad de probabilidad positiva, y se le puede asociar una ley de conservación si se formula adecuadamente. Otra cosa es que se pueda calcular.
- Las condiciones de frontera de Vilenkin, Hartle-Hawking y Linde tienen cabida dentro de las soluciones obtenidas según el método DSR, probando que éste no altera lo interpretativo.
- El modelo que mejores resultados predice es el FRW, siendo un modelo ampliamente aceptado como modelo cosmológico para el Universo actual. (Inflación, Bianchi+$\Lambda$)
- La cuantización geométrica de la gravedad es difícil por razones técnicas y de formulación, pero vemos que con un tratamiento adecuado es posible solventar algunos inconvenientes, teniendo en cuenta que no se ignora el carácter geométrico de la gravedad.
- El formalismo WD no está en desacuerdo con el mecanismo de inflación, que es el modelo que mejor predice el Universo primario.

- Formulado correctamente (Bianchi I), las anisotropías en el universo primario se pueden modelar en el contexto WD, y se puede dinamizar el modelo con la constante cosmológica, sin entrar en contradicciones con el método.
- El modelo de Senovilla (que en particular es inhomogéneo) no permite hacer la descomposición, lo cual puede implicar la restricción a modelos homogéneos, o a la eliminación de la condición de Hermiticidad por las consideraciones de los espacios de Hilbert utilizados.

Finalmente, quedan abiertas las posibilidades de tener en cuenta el modelo inflacionario dentro del modelo FRW, para hacer la descomposición de Dirac desde lo estudiado aquí; también queda la inclusión de la constante cosmológica dentro del modelo de Bianchi tipo I, para ver si es posible obtener expansión en un modelo anisotrópico en el régimen de Cosmología Cuántica.

Espero haber llevado a cabo este trabajo al punto de ser un aporte para futuras investigaciones sobre el tema, y espero también haber encontrado un pequeño rayo de la Luz Verdadera, aunque creo que eso es pedir demasiado.

*Stat Crux dum volvitur Orbis.*

# Apéndice A

# Cuestiones Topológicas

En el capítulo 1 se explicó lo que es una foliación, al sentar las bases para la descomposición ADM de la métrica. Dijimos que en principio casi todas las métricas admitían este tipo de descomposición. Pero ¿por qué tuvimos problemas en la métrica de Kasner, que se deja hacer la descomposición (3+1)? Lo que pasa es que la métrica de Kasner sí admite descomposición, pero la relatividad general no admte ninguna extensión de este modelo, entonces cuando se cambia la estructura de la variedad con la constante cosmológica, hay problemas.
Para que un superespacio admita una foliación, es requerido que esta sea globalmente hiperbólica. Esta definición implica, entre otras cosas, que existe una línea única sobre la cual toda la variedad se puede describir en términos de esta línea, que debe ser como de tiempo. Otra cosa que implica que la variedad sea globalmente hiperbólica es que estas líneas de tiempo no pueden cer cerradas, por lo cual la historia global no se repite. Esto respalda lo que dijimos en el último capítulo acerca de que el Big-Bang primordial no se pude repetir: son los secundarios lo que pueden repetirse por toda la eternidad. La hiperbolicidad no es un nombre sacado de la manga, pues la definición usual de hiperbolicidad en una superficie es que, si trazamos una línea sobre la superficie, no existe ninguna otra que sea paralela a ésta; lo que nos dice que si existe un línea como de tiempo en el superespacio, no puede haber otra que represente la misma historia.
Entonces cuando deseamos alterar la variedad como de Kasner, estamos alterando la hiperbolicidad del superespacio, lo que hace que el formalismo, desde la descomposición ya no admita una foliación y por lo cual no se puede hallar ecuación de Wheeler DeWitt.

Cuando se hace la integral de camino para sumar sobre todas las posibles historias, se suma sobre todas las 3-métricas posibles; pero esto implica que todos los espacios admisibles son globalmente hiperbólicos, lo cual restringe las métricas y las posibles variedades dentro del superespacio de todas las métricas. Pero no hay razón fundamental para evitar este tipo de espacios, por lo cual se podría decir que la función de onda global calculada por medio de la integral de camino es incorrecta. Pero aquí viene el principio antrópico al rescate, pues nuestro universo sólo puede haber salido de la suma de probabilidades de todos los espacios globalmente hiperbólicos, y el efecto de los otros se ignora, pues nuestro universo muestra hiperbolicidad. El argumento puede parecer débil, pero debemos tener en cuenta que el camino de la Cosmología Cuántica restringe ciertos modelos por no acoplarse con lo observado, por ejemplo rechazamos el modelo de Robertson Walker, no porque esté equivocado (después de todo es muy adecuado en el universo actual) sino porque nuestro universo requiere un ajuste más fino de la teoría. Entonces probamos suerte con el modelo FRW y se ajusta mejor, pero aun así no es lo que necesitamos. Entonces incluimos el mecanismo de inflación. Y así sucesivamente. Entonces, el hecho que restrinjamos la teoría a ciertas condiciones no implican su falacia, sino que por ser una teoría cuántica, es fundamentalmente impredecible y ni estando sobre la función de onda podemos hallar cual es exactamente. Entonces, lo que medimos son sombras de la métrica global, que está ahí, que depende de un número enorme de parámetros, y que es fundamentalmente desconocida para nosotros.

Cabe hacer una pregunta fundamental: ¿en qué espacio estamos trabajando? Las restricciones que salen antes de cuantizar son clásicas, y actúan en el espacio de fase de las variables canónicas y sus conjugadas. Pero después de cuantizar, cuando los momentos operan sobre la función de onda es necesario armar un espacio de Hilbert auxiliar [2, 30], $\mathcal{H}' = L^2(\mathrm{R}^2)$ para que los operadores actúen sobre él y satisfagan las relaciones de conmutación que en últimas son las que definen la cuantización. Pero el espacio de las funciones de onda no es este mismo espacio, por lo cual no podemos restringir las funciones de onda a las que son de cuadrado integrable, ya que la norma de este espacio no es necesariamente la misma que la de $\mathcal{H}'$. Es por esto que, si bien es conveniente pedirle integrabilidad a las funciones de onda por razones físicas, no es una exigencia para la validez de cada modelo.

# Bibliografía


[1] Christodoulakis, T., Papadopoulos, G. O. *Quantum Cosmology for the general Bianchi type II, VI and VII vacuum geometries.* gr-qc\0109058

[2] Isham, C. J. *Canonical quantum gravity and the problem of time.* gr-qc\9210011

[3] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. *Gravitation.* W. H. Freeman & Co., 1973

[4] Kolb, E. W. y Turner, M. S. *The early universe.* Addison-Wesley, 1990

[5] Hartle, J. B., Hawking, S. W. *Wave function of the universe.* Phys. Rev. D **28** No. 12 p. 2960 (1983)

[6] Misner, C. W. *Quantum Cosmology I.* Phys. Rev. **186** No. 5 p-1319 (1969)

[7] Carlip, S. *Quantum gravity progress report.* gr-qc\0108040

[8] DeWitt, B. S. *Quantum theory of gravity I. The canonical theory.*, Phys. Rev. **160** No. 5 p. 1113 (1967)

[9] Hawking, S. W. *Quantum Cosmology.* Reprint.

[10] Hawking, S. W. *Arrow of time in cosmology.* Phys. Rev. D **32** No. 10 p. 2489 (1985)

[11] Manojlovic, N., Mena, G. A. *Non-Perturbative canonical quantization of minisuperspace models: Bianchi types I and II.* gr-qc\9304041

[12] Dimnikova, I. G., Filchenkov, M. L. *Quantum birth of a hot universe.* gr-qc\0009025

[13] Hervik, S. *The Bianchi type I minisuperspace model.* gr-qc\0003084

[14] Kung, J. H. *Quantization of closed minisuperspace models as bound states.* hep-th\9302016

[15] Simeone, C. *Path integrals for minisuperspaces and its relation with non equivalent canonical quantizations.* gr-qc\0302082

[16] Vilenkin, A. *The quantum cosmology debate.* gr-qc\9812027

[17] Ryder, L. H. *Quantum field theory.* Cambridge University Press, 1999

[18] Hawking, S. W. *The no-boundary proposal and the arrow of time.* Reprint

[19] Rago, H. *Cosmología relativista: Una introducción.* U. de los Andes, Mérida 1995

[20] Senovilla, J. M. M. *New class of inhomogeneous cosmological perfect-fluid solutions without Big-Bang singularity.* Phys. Rev. Lett. **64** No. 19 p. 2219 (1990)

[21] Feinstein, A., Senovilla, J. M. M. *A new inhomogeneous cosmological perfect fluid solution with $p = \rho/3$.* Class. Quantum Grav. **6** L89 (1989)

[22] Brevik, I., Pettersen, S. V. *Can a Kasner universe with a viscous cosmological fluid be anisotropic?* gr-qc\0003039

[23] Cataldo, M., Cruz, N., del Campo, S., Lepe, S. *Holographic principle and the dominant energy condition for Kasner type metrics.* gr-qc\0104028

[24] Kramer, D. *et. al. Exact solutions of Einstein's field equations.* Cambridge University Press, 1980

[25] Yamazaki, H. *Dirac descomposition of WD equation on the Bianchi class A models.* gr-qc\0101066

[26] Kartunnen, H. *et. al. Fundamental Astronomy.* Springer-Verlag, 1996

[27] Mallett, R. L. *Dirac quantization of Friedmann cosmologies.* Class. Quantum Grav. **12** L1 (1995)

[28] Synge, J. L., Schild, A. *Tensor Calculus.* Dover, 1978

[29] Mongan, T. R. *A simple quantum cosmology.* gr-qc\0103021

[30] Mostafazadeh, A. *Wave function of the universe and its meaning.* gr-qc\0308029

[31] Hawking, S. W. *El universo en una cáscara de nuez.* Drakontos Planeta, 2001