

Tentamen Kosmologie 2002

vrijdag 28 juni
13:00–16:00, WCW

Vincent Icke

Bij dit tentamen is uitsluitend het gebruik toegestaan van uw eigen handgeschreven aantekeningen en van de verstrekte notities Basic material for cosmology 2002. Ook een zakrekenmachine mag worden gebruikt (mits niet als spiekbriefje geprogrammeerd). Vermeld op elk blad papier uw naam, en op het eerste blad ook uw adres, en nummer de bladzijden. Schrijf bij beantwoording alles op wat u van toepassing acht, ook tussenstappen en dergelijke. Ook kladwerk mag worden ingeleverd, mits als zodanig aangemerkt. Geef bij ieder antwoord uw argumentering in voldoende detail! Onduidelijkheden worden onveranderlijk in uw nadeel uitgelegd.

(1). _____

Het Heelal bestaat uit deeltjes, ruimte en tijd. Maar de kosmologie houdt zich in eerste instantie bezig met veel grotere structuren dan atomen.

a. Men zegt wel losweg dat, op grote schaal, sterrenstelsels de “bouwstenen van het Heelal” zijn. Wat is daarvoor de *observationele* rechtvaardiging? Waarom geldt een soortgelijk argument niet voor b.v. clusters van sterrenstelsels?

b. Moet dit “bouwstenen”-verhaal worden herzien als wij de donkere materie in aanmerking nemen? Probeer het antwoord zo goed mogelijk kwantitatief te maken.

c. Vanaf welke afmeting is te verwachten dat de uitdijning van het Heelal een merkbare invloed heeft op de structuur van een “bouwsteen”? Geef hiervoor een kwantitatieve uitdrukking.

(2). _____

Beschouw het meest algemene Friedmann-Robertson-Walker heelal, dwz. een heelal waarin ook de kosmologische constante Λ in de bewegingsvergelijkingen voorkomt. Neem hierin de toestandsvergelijking van ‘stofdeeltjes’.

a. Schets het verloop van $(da/dt)^2$ als functie van a .

b. Laat aan de hand daarvan zien dat bij een bepaalde waarde van de krommingsconstante kc^2 een statische oplossing $da/dt = 0$, $a = \text{const}$ bestaat. Bereken algebraïsch bij welke waarde van k die oplossing wordt bereikt.

c. Schets het fasevlak $(da/dt, a)$. Maak aan de hand van die figuur aannemelijk dat de in b. gevonden statische oplossing niet stabiel is.

(3). _____

a. Laat zien dat de afstand r waarover men terugkijkt in een Friedmann heelal verbonden is met de tijd t tot welke men terugkijkt door de relatie

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - kr^2}$$

Los deze vergelijking op in het Einstein-De Sitter geval.

b. Toon op grond hiervan aan dat de vorm van de verleden lichtkegel in een Einstein-De Sitter heelal gegeven wordt door

$$r^* = r_H \left(\tau^{2/3} - \tau \right) ; \quad \tau \equiv \frac{t}{t_0}$$

Schets deze functie. Geef een uitdrukking voor, en een interpretatie van, de parameter r_H .

c. Beschrijf op grond van het bovenstaande resultaat wat u verwacht voor het gedrag, als functie van b.v. τ , van de schijnbare hoekafmeting van een voorwerp met vaste eigen afmeting. Wat volgt hieruit voor de oppervlaktehelderheid van een bron?

(4). _____

Oneffenheden in de kosmische microgolf-achtergrondstraling (CMBR) geven informatie over het Heelal voordat straling en materie ontkoppelden. Die oneffenheden zijn vermoedelijk afkomstig van zgn. *Silk-oscillaties* van het kosmische plasma. De amplitude δ van dichtheidsfluctuaties, in het geval dat de fluctuaties een massa hebben die zeer veel kleiner is dan de Jeans-massa, wordt beschreven door

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + 2H \frac{d\delta}{dt} + \frac{s^2 q^2 \delta}{a^2} = 0$$

(zie college-aantekeningen, Eq.(25.6)). Hierin is H het Hubble-getal, s de geluidssnelheid, en q het golfgetal van de oscillatie.

a. Leid hieruit de vergelijking voor δ af in het niet-relativistische Einstein-De Sitter heelal.

b. Laat zien dat de oplossing van die vergelijking wordt gegeven door

$$\delta = \delta_0 \tau^{-1/6} \cos(\omega \log \tau + \phi); \quad \tau \equiv \frac{t}{t_0}$$

waarin δ_0 een willekeurige beginwaarde en ϕ een willekeurige fase-constante. Schrijf de effectieve frequentie ω in termen van t_0 , s en q .