Antwoorden
Tentamen Inleiding Astrofysica
Vincent Icke - 20 december 1999

Op uw tentamenformulieren heb ik slechts zeer spaarzaam opmerkingen gemaakt. Door vergelijking met onderstaande antwoorden kunt u zien waaraan ik de beoordeling heb geijkt. In enkele gevallen zijn meer benaderingen mogelijk. Bij de beoordeling van varianten heb ik, evenals bij de 'hoofdvarianten' hier gegeven, gelet op de scherpte van de formulering en op volledigheid van het argument.

1a. De centrifugale versnelling g_c is

$$g_c = \Omega^2 R$$

waarin R de straal van het ruimtestation. Afleiding in Hst.9. Invullen van de numerieke waarden levert (SI eenheden!)

$$\Omega = \sqrt{\frac{g_c}{R}} = \sqrt{9,8 \times 10^{-5}} = 9,9 \times 10^{-3} \quad \text{rad s}^{-1}$$

1b. Een cirkel spant een hoek op van 2π radialen, dus is de omwentelingstijd

$$t = \frac{2\pi}{\Omega} = 634,7 \quad \text{s} = 10,6 \quad \text{min}$$

De omtrek van de cirkel is $2\pi R$, dus is de omtrekssnelheid

$$v = \Omega R = 989,9 \quad \text{m s}^{-1} = 3563,8 \quad \text{km/h}$$

2a. Als de centrifugale versnelling en de versnelling van de zwaartekracht precies in evenwicht zijn, is de effectieve versnelling nul, dus (Hst.12)

$$-\frac{GM}{R^2} + \Omega^2 R = 0$$

waaruit de Derde Wet van Kepler volgt:

$$\Omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

Invullen van de numerieke waarden levert

$$\Omega = 13632 \quad \text{rad s}^{-1}$$

Als de ster harder zou draaien dan dat, wint de centrifugale versnelling het van de zwaartekracht en de ster spat uit elkaar.

2b. De omloopstijd is $2\pi/\Omega$, dus is de pulsfrequentie

$$\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 2,17 \quad \text{kHz}$$

3a. De absolute waarde van de aantrekkende kracht F op een afstand R is (Hst.6)

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

Het oppervlak van een bol met straal R is $4\pi R^2$, en de druk P is dus

$$P = \frac{GMm}{R^2}\frac{1}{4\pi R^2} = \frac{GMm}{4\pi R^4}$$

3b. Het volume van de pit is $4\pi R^3/3$, en dus is de dichtheid $\rho = 3M/4\pi R^3$. Zodoende is

$$P = \frac{GMm}{4\pi R^4} = \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{Gm}{3R} = \frac{\rho Gm}{3R}$$

Het verband tussen ρ, P en T wordt gegeven door de ideale gaswet

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T$$

Vullen we hier de gevonden waarde van P in, dan komt er

$$T = P\frac{\mu}{k\rho} = \frac{\rho Gm}{3R}\frac{\mu}{k\rho} = \frac{G\mu}{3k}\frac{m}{R}$$

4a. De bewegingsvergelijkingen in cylindercoördinaten zijn (Hst.8)

$$\frac{dv}{dt} = g(r) + \Omega^2 r = -\frac{1}{r^a} + \Omega^2 r \ ; \qquad \Omega = \frac{\mathcal{J}}{r^2}$$

Op een cirkelbaan is $dv/dt = 0$. Substitutie van Ω uit de tweede vergelijking in de eerste levert op

$$\frac{1}{r^a} = \Omega^2 r = \frac{\mathcal{J}^2}{r^3} \ ; \quad \text{dus } r^{3-a} = \mathcal{J}^2 \ ; \quad \text{oplossing is } R = \mathcal{J}^{2/(3-a)}$$

4b. In het geval $a = 4$ hebben we uit (4a) dat $R = 1/\mathcal{J}^2$, en uit de vergelijking voor Ω volgt dan dat

$$\Omega = \frac{\mathcal{J}}{R^2} = \mathcal{J}^5$$

4c. Directe differentiatie van g_{eff} uit (4a) levert op, in het geval $a = 4$ en $r = R$, dat (Hst.13)

$$\kappa^2 = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{r^4} + \frac{\mathcal{J}^2}{r^3}\right) = -\frac{4}{r^5} + \frac{3\mathcal{J}^2}{r^4} = -4\mathcal{J}^{10} + 3\mathcal{J}^{10} = -\Omega^2$$

De waarde van $-\kappa^2$ geeft de helling van de effectieve versnelling ter plaatse van de cirkelbaan. Als die helling negatief is (zoals in het Kepler-geval), is de bewegingsvergelijking voor kleine afwijkingen x van de cirkelbaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa^2\,x = -\Omega^2\,x$$

met als oplossing een harmonische oscillatie. Maar als het teken van $-\kappa^2$ omgekeerd is, komt er

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \kappa^2\,x = \Omega^2\,x$$

met als oplossing een exponentiëel toenemende x. De cirkelbaan is dus niet stabiel.

4d. Door directe integratie vinden we

$$-\Phi_{\text{eff}} = \int \left(-\frac{1}{r^4} + \frac{\mathcal{J}^2}{r^3} \right) dr = \mathcal{E} + \frac{1}{3r^3} - \frac{\mathcal{J}^2}{2r^2}, \text{ en dus } \quad \Phi_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{J}^2}{2r^2} - \frac{1}{3r^3} - \mathcal{E}$$

In tegenstelling tot het Kepler-geval is dit een functie met een bergvorm inplaats van een dalvorm. Als dus zekere waarde van $\mathcal{E}$ twee oplossingen geeft, ligt daartussen een *maximum* van de effectieve potentiaal, en daar kan het deeltje met de gegeven energie $\mathcal{E}$ niet komen.

---

5. De vergelijking voor de radiële versnelling in het Kepler-geval is (Hst.12)

$$\frac{dv}{dt} = g_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r^2} + \Omega^2 r$$

Voor cirkelbanen ($g_{\text{eff}} = 0$) met straal R volgt hieruit

$$\Omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

De omtrekshoek 2π wordt doorlopen in een periode $P = 2\pi/\Omega$ en daaruit volgt de Derde Wet van Kepler,

$$P^2 = \text{const} \times R^3$$

De bewegingsvergelijking voor radiële banen in het Oerknal-model is (Hst.23)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}$$

De energie-integraal hiervan is

$$\frac{1}{2}v^2 = \mathcal{E} + \frac{GM}{r}$$

In het geval $\mathcal{E} = 0$ levert dat de differentiaalvergelijking

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

met de oplossing

$$R^{3/2} = \text{const} \times t \; ; \quad \text{ofwel} \quad t^2 = \text{const} \times R^3$$

De overeenkomst is dus eigenlijk een kwestie van dimensie: een gravitationele snelheid schaalt als $v \propto \sqrt{M/r}$ en de overeenkomstige tijd schaalt als $t \propto r/v \propto \sqrt{r^3/M}$.