Antwoorden tentamen Kosmologie

Vincent Icke – vrijdag 28 juni 2002

Op uw tentamenformulieren heb ik slechts zeer spaarzaam opmerkingen gemaakt. Door vergelijking met onderstaande antwoorden kunt u zien waaraan ik de beoordeling heb opgehangen. In enkele gevallen zijn meer benaderingen mogelijk. Bij de beoordeling van varianten heb ik, evenals bij de 'hoofdvarianten' hier gegeven, gelet op de scherpte van de formulering en op volledigheid van het argument.

1a. Sterrenstelsels werden ooit beschouwd als de 'bouwstenen' van het Heelal, omdat ze 'er zo uitzien': de fotometrie in het visuele gebied toont een oppervlakte-helderheid die met een macht van de straal afneemt, tot aan een bepaald maximum, waarna de hoeveelheid licht scherp afvalt. Ook waarnemingen in neutrale waterstof toonden zo'n gedrag. De dichtheidsverdeling van grotere structuren, zoals groepen en clusters van sterrenstelsels, gaven *niet* een beeld waarbij de structuren een 'scherpe rand' laten zien.

1b. Tegenwoordig gaat dit verhaal veel minder goed op. Uit het gedrag van de draaiingskromme van sterrenstelsels blijkt dat de draaisnelheid v_t in de buitendelen ongeveer constant blijft. Omdat in dynamisch evenwicht geldt

$$v_t^2 \propto \frac{M}{r}$$

volgt uit $v_t = \text{const}$ dat $M \propto r$. Omdat het zichtbare licht een vrij scherpe rand toont, is er blijkbaar donkere materie daarbuiten die wel met het sterrenstelsel is geassocieerd, maar waar in eerste instantie geen 'rand' bij aan te geven is.

1c. In het bovenstaande hebben we de massaconcentratie van een 'bouwsteen' gekarakteriseerd door een interne snelheid, zeg v. De Hubble-regel voor de kosmische snelheid is $v_H = Hr$. Dus verwachten wij dat de uitdijing zich zal laten gelden vanaf $v \approx v_H$:

$$r \approx \frac{v}{H} \approx \frac{200 \text{ km/s}}{67 \text{ km/s Mpc}} = 3 \text{ Mpc}$$

en dat is veel meer dan de afmeting van een sterrenstelsel. Als de interne snelheid thermisch is, en kan worden gekarakteriseerd door een temperatuur T, hebben we (met zekere constante A)

$$r \approx A\frac{\sqrt{T}}{H}$$

2a. In een 'stof' heelal wordt de interne druk P verwaarloosd (materie of straling geven geen bijdrage aan de interne energiedichtheid). Zodoende

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 \equiv \frac{3M}{4\pi}$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{a} - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2$$

(zie aantekeningen, b.v. (32.1-4)).

2b. Bij kleine a domineert de eerste term, bij grote a de derde, en er is dus een minimum. Differentiatie toont dat dat gebeurt bij

$$a^3 = \frac{3GM}{\Lambda}$$

Vullen we dit in, dan blijkt dat $da/dt = 0$ bij

$$k = \frac{1}{c^2}\left(9\Lambda G^2 M^2\right)^{1/3}$$

Dit is het statische heelalmodel waarvoor Einstein de constante Λ invoerde.

2c. Het fasevlak $(da/dt, a)$ vertoont bij de bovenstaande waarde van k een *zadelpunt*. Zelfs al zouden we een heelal starten met de berekende waarde van a, dan nog zou het door een infinitesimale fluctuatie altijd op een fasebaan terechtkomen die naar oneindig leidt. Dus is dit model – zoals De Sitter opmerkte – niet stabiel.

3a. Zie aantekeningen, Eq.(6.18-21).

3b. Zie aantekeningen, Eq.(6.20-22).

3c. Zie aantekeningen, Eq.(6.33-34). Omdat

$$1 + z = \frac{a_0}{a_1} = \left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{2/3} = \tau^{-2/3}$$

vinden we

$$\delta = \frac{DH_0}{2c}\tau^{-2/3}\left(1 - \tau^{1/3}\right)^{-1} = \frac{D}{r_H}\,\frac{1}{\tau^{2/3} - \tau}$$

met een minimum bij $\tau = 8/27$. Omdat voorbij deze waarde (dwz. als we kijken naar het vroegere heelal) δ toeneemt, is de oppervlaktehelderheid van een bron niet constant; immers, deze is evenredig met $(1/r\delta)^2$. Bronnen op kosmologische afstand hebben dus een *kleine* oppervlaktehelderheid, zodat we op grote roodverschuiving selectief compacte bronnen zien; zie aantekeningen, Eq.(6.41).

4a. In het Einstein-De Sitter-geval is $H = 2/3t = 2/3t_0\tau$, zodat

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{4}{3\tau}\frac{d\delta}{d\tau} + s^2q^2t_0^2\frac{\delta}{a^2} = 0$$

De adder zit hem nu in het gedrag van s^2q^2. Voor een gegeven golfgetal q, zal de effectieve geluidssnelheid s evolueren omdat de thermische toestand van het Heelal verandert. Op college is behandeld hoe dit in rekening wordt gebracht, maar wie dat is vergeten kan het reconstrueren uit (2a.) boven. Immers, volgens de Friedmann vergelijking evolueert het kwadraat van een snelheid (of een energie) volgens

$$v^2 \propto \frac{1}{a}$$

Anders: als u weet dat s^2 evenredig is met de temperatuur, kunt u ook de regel van Wien gebruiken (zie aantekeningen Sect.10): $s^2 \propto T \propto 1/a$, en dus

$$s^2 = \frac{s_0^2}{a}$$

waarmee we verkrijgen

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{4}{3\tau}\frac{d\delta}{d\tau} + s_0^2q^2t_0^2\frac{\delta}{a^3} = \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{4}{3\tau}\frac{d\delta}{d\tau} + \frac{p^2}{\tau^2}\delta = 0$$

4b. Men kan direct de gegeven uitdrukking voor δ substitueren en de hele zaak doorrekenen. De oplossing zelf is te vinden door op te merken dat iedere term in de vergelijking effectief schaalt met τ^{-2}, hetgeen onmiddellijk aanleiding is tot de *Ansatz* $\delta \propto \tau^\alpha$. Dit geeft een kwadratische vergelijking voor α,

$$\alpha(\alpha - 1) + \frac{4}{3}\alpha + p^2 = 0 \; ; \qquad p^2 \equiv \frac{1}{36} + \omega^2$$

met als oplossingen

$$\alpha = -\frac{1}{6} \pm i\omega$$

waaruit het gevraagde volgt.