Inleiding Astrofysica
Samenvatting 1999

Vincent Icke ◇ icke@strw.LeidenUniv.nl

1. Doelstelling en samenvatting

Waarin wordt aangekondigd waar het allemaal over gaat. Er staat hier veel in om te onthouden. Maar onthoud vooral dit: astrofysica is zware kost! Hou vol.

Het doel van het college Inleiding Astrofysica bestaat uit drie delen: ten eerste, een basis geven voor het begrijpen van wat zich in het Heelal afspeelt; ten tweede, aanwijzingen geven voor de delen van wis- en natuurkunde die hierbij een rol spelen; ten derde, een raamwerk vormen voor de meer gedetailleerde colleges en practica die de rest van de opleiding uitmaken.

Het gaat hierbij in eerste instantie om de klassieke mechanica, en in het bijzonder de Newtonse theorie van baanberekeningen ("hemelmechanica"). Die wordt toegepast op statische situaties (vorm en structuur van planeten en sterren), op stationaire situaties (cirkelbanen), en op dynamische systemen (planeetbanen, clusters van sterren, sterrenstelsels, en het Heelal).

Verder komen ter sprake: thermodynamica (dichtheid, druk en temperatuur van gassen), quantummechanica (toestanden van atomen en deeltjes, warmtestraling), electromagnetisme (pulsars) en relativiteitstheorie (tijddilatatie en Lorentz-FitzGerald contractie, zwarte gaten).

Bij de behandeling van al deze zaken wordt geleidelijk duidelijk welke wiskundige technieken nodig zijn, en waarom. In het bijzonder zijn dat algebra, lineaire algebra, en analyse. Als begeleiding van het college worden numerieke rekenprogramma's gegeven, maar kennis van numerieke wiskunde is niet vereist.

Na afloop van het college wordt de student geacht zelfstandig elementaire problemen over de behandelde onderwerpen te kunnen oplossen, zonder raadpleging van literatuur of notities.

Het is wel de bedoeling dat IAF een overzicht geeft over de theorie- en interpretatiekant van de sterrenkunde, maar IAF is geen college algemene sterrenkunde. Waarneemtechnieken en verwerking van meetgegevens komen elders aan de orde.

De formule-nummers van zeer belangrijk materiaal zijn in de tekst met een schoppenaas ♠ aangegeven, bijvoorbeeld alsvolgt:

$$E = \gamma mc^2 \tag{1.1}$$ ♠

Het wordt met klem aangeraden zulke passages uit het hoofd te leren omdat zij onontbeerlijk zijn voor het vervolg van de studie. Het is aan te bevelen om eerst het *globale gedrag* van de variabelen in zo'n formule te onthouden, en dan pas de (eventuele) constanten. Bijvoorbeeld, in de formule

$$T = \frac{G\mu}{3k}\frac{M}{R} \tag{1.2}$$ ♠

is de relatie tussen T, M en R het belangrijkst:

$$T \propto \frac{M}{R} \tag{1.3}$$

Deze weergave met een 'evenredig' symbool $\propto$ moet gelezen worden als

$$T = \text{constante} \times \frac{M}{R} \tag{1.4}$$

en uiteindelijk, na invullen van de constanten, als Eq.(0.2) .

Paragrafen die beginnen met **Ga nu zelf het volgende na** zijn bedoeld als oefening om te zien of de lezer de stof begrijpt; tevens geven deze passages een aanwijzing voor het soort vragen die op een tentamen zouden kunnen voorkomen.

Hieronder volgt een overzicht van de samenvattingen van alle hoofdstukken uit dit boek.

Als een buitenaards wezen onze planeet zou bezoeken, en ons zou vragen wat wij over het Heelal te weten zijn gekomen sinds we uit de bomen klommen, dan is het kortste antwoord: het Heelal bestaat uit deeltjes, ruimte en tijd. Op basis van deze schijnbaar eenvoudige zin kunnen we de hele natuurkunde reconstrueren, en alle sterrenkundige toepassingen daarvan. In dit college beperken wij ons tot de 'eerste levensbehoeften': de klassieke mechanica, een deel van de quantummechanica, stukjes thermodynamica, en relativiteitstheorie.

De regels van de mechanica zijn van zeer groot belang in de sterrenkunde. Het is dus essentieel om te weten waar die regels vandaan komen. Het blijkt dat de 'wetten' van de beweging voortkomen uit bepaalde regelmatigheden in de Natuur, 'symmetrie' genoemd. Dat zijn: homogeniteit van tijd en ruimte, en relativiteit van de snelheid. Uit deze symmetrieën leidt men de bewegingsvergelijkingen af. Bij deze afleiding blijkt dat wiskundige analyse niet gemist kan worden.

Bij iedere symmetrie hoort een grootheid die niet verandert. In de klassieke mechanica zijn dat de energie en de impuls. De klassieke bewegingsvergelijking heeft in het rechterlid nul, in het geval dat er geen uitwendige krachten werken. Dit leidt tot behoud van impuls. De vergelijking kan in alle gevallen eenmaal worden geïntegreerd. Zo ontstaat een vorm waaruit blijkt dat een bepaalde grootheid bij de beweging hetzelfde blijft. Dit is de behoudswet voor de energie.

Gewapend met de vergelijkingen van de klassieke mechanica gaan we het Heelal proberen te begrijpen. Het uiteindelijke doel is, te berekenen hoe astronomische dingen zich gedragen. Het eenvoudigst is, om daarbij te beginnen met dingen in evenwicht, zoals planeten en sterren. Eerst bezien wij de structuur van planeten, in evenwicht tussen enerzijds hun zwaartekracht en anderzijds de druk van de materie waaruit zij zijn gebouwd. Hier berekenen we de sterkte van de materie uit een simpele schatting van materiaalsterkte.

Nu we eenmaal weten dat een voldoende grote massa bolvormig is, kunnen we schatten wat de inwendige structuur van zo'n bol is. Wij doen dat door de bol in twee delen te splitsen: een schil en een pit, met allebei dezelfde dikte en massa. Wij berekenen een verband tussen de massa, straal, dichtheid, temperatuur en andere eigenschappen van de bol. Later zullen wij zien dat deze schattingen verrassend realistisch zijn.

Nu gaan we de structuurformule van een zelf-graviterende bol uitbreiden naar zware dingen zoals sterren. Natuurlijk bestaat een planeet of een ster niet uit een simpele schil en een pit daarbinnen. Op basis van precies dezelfde aanpak kunnen we het veel beter doen: we nemen niet twee schillen, maar stapelen er oneindig veel op. Uiteraard leidt dat tot een differentiaalvergelijking voor de structuur van de bol. De oplossing hiervan is erg ingewikkeld, maar een schatting van de bijbehorende fysische grootheden levert een uitkomst die sterk lijkt op het twee-schillenmodel. In de hier gegeven beschrijving zijn sterren in evenwicht doordat er in hun binnenste een zeer hoge temperatuur heerst, dat wil zeggen snelle chaotische bewegingen van de atomen. Later komen wij een soortgelijke aanpak tegen bij de structuur van sterrenstelsels, die in evenwicht zijn door de chaotische bewegingen van hun sterren.

Nu gaan we over naar de dynamica: de snelheden zijn nu niet meer nul. De krachten worden niet in evenwicht gehouden door een tegengestelde kracht. In alles wat volgt zullen wij meestal werken met krachten die naar een vast punt zijn gericht. Bij zo'n centrale kracht is het niet handig om in rechthoekige (Cartesische) coördinaten te werken. Cylindercoördinaten zijn een stuk beter. Hierbij blijkt dat de lineaire algebra zeer goede diensten bewijst om zulke veranderingen van coördinaten snel en efficiënt te berekenen.

Uit de afleiding van de bewegingsvergelijking weten we dat alleen een deeltje waarop geen krachten werken, een rechte baan doorloopt met constante snelheid. Als de baan gekromd is, is er sprake van versnelling, en wij moeten weten hoe groot die is. Wij volgen de berekening van Huygens. We stellen vast dat elke kromming plaatselijk op twee manieren kan worden benaderd: door een cirkelboog en door een parabool. Het stukje cirkel wordt doorlopen met een hoeksnelheid en een kromtestraal. Door die af te beelden op de parabool vinden we welke versnelling overeenkomt met dat stukje van de baan. Zo'n versnelling noemen we 'centrifugaal'.

Een centrale kracht heeft een bijzondere eigenschap: de kracht is steeds naar een vast punt gericht. Deze afwijking van het algemene geval betekent dat de beweging van een deeltje in zekere zin in zijn vrijheid is beperkt. Bij zo'n beperking hoort een behouden grootheid, een 'bewegingsconstante'. In het geval van beweging onder invloed van een centrale kracht is dat het impulsmoment. Dat is het uitproduct van de impulsvector en de vector van de hoeksnelheid. In een vlak reduceert dit tot het product van de massa, de snelheid en de kromtestraal van de baan. Het behoud van impulsmoment is verantwoordelijk voor de tweede wet van Kepler, de 'perkenwet'.

Tot dusver hebben wij het centrum van de kracht als vast gegeven genomen, maar in werkelijkheid is de toestand algemener. Omdat krachten wederzijds zijn (het gaat altijd om een wisselwerking) is er geen vast centrum. Posities in de ruimte zijn relatief. Van die vrijheid kun je gebruik maken door je coördinaten handig te kiezen. De beste keus is het stelsel waarin de som van de posities van de deeltjes, gewogen met hun massa, nul is. Dat massamiddelpunt fungeert als 'vast punt' voor de krachten.

Als voorbereiding op de algemene oplossing van de bewegingsvergelijkingen staat de cirkelbaan centraal. De reden is dat in veel sterrenkundige toepassingen de kracht die op het deeltje werkt naar een vast punt is gericht. In het geval van zo'n centrale kracht kan de hoeksnelheid van de cirkelbaan eenvoudig worden gevonden. In het planetenstelsel is dat de Derde Wet van Kepler.

Nu we gevonden hebben hoe cirkelbanen zich gedragen, kunnen we kijken of het iets algemener kan. De effectieve radiële versnelling is nul op de cirkelbaan. In de buurt van dat punt gaat de radiële versnelling van positief (dicht bij het centrum) naar negatief (buiten de cirkelbaan). Door de helling van die lijn te bekijken, krijgen we een vergelijking voor de harmonische oscillator. Het deeltje voert dus een oscillatie uit rondom de cirkelbaan. Wanneer de cirkelbaanfrequentie en de oscillatiefrequentie zich verhouden als gehele getallen, is de baan gesloten. In het Kepler-geval is die verhouding 1:1, bij de ruimtelijke harmonische oscillator is het 1:2.

Binnen een cirkelbaan wil een deeltje wat sneller lopen, daarbuiten wat langzamer dan op de cirkelbaan. Een vast lichaam met eindige afmeting ondervindt daardoor een uiteendrijvende werking, de getijdenkracht. Als de eigen sterkte of de eigen zwaartekracht niet toereikend is, wordt het voorwerp door de getijden uitelkaar getrokken. Zo ontstaan de ringen van Saturnus. Later zullen we zien dat in botsende sterrenstelsels iets soortgelijks gebeurt.

Het is niet zo dat alleen de Zon de planeten aantrekt; Zon en planeten trekken elkaar aan. Ook al bevat de Zon dan duizend maal meer massa dan alle planeten bijelkaar, toch is dat niet genoeg om de Zon helemaal te doen stilstaan. Wij kunnen uitrekenen wat er gebeurt als twee massa's elkaar aantrekken, door de bewegingsvergelijking zo te formuleren dat het massamiddelpunt van de deeltjes in de oorsprong van het coördinatenstelsel staat.

Het klapstuk van de berekening van de beweging van twee deeltjes die elkaar door hun zwaartekracht aantrekken is de oplossing van de baanvergelijking. Hiermee is de theoretische verklaring van de wetten van Kepler compleet.

Bij de behandeling van de Emden-vergelijking voor de structuur van zelfgraviterende bollen hadden we nog geen rekening gehouden met het feit dat een zeer zware bol zo heet is dat hij straling uitzendt. Straling is energieverlies, dus zonder compenserende bron van energie kan zo'n bol niet stabiel zijn.

Uit het verband tussen massa, straal en temperatuur van bollen zien wij dat in het binnenste van een voorwerp als de Zon de temperatuur van de orde van 10 miljoen kelvin is. Onder die omstandigheden zijn de electronen geheel los van de atoomkernen. Die kernen botsen tegen elkaar en zo kan er kernfusie optreden, wardoor de ster kan blijven stralen. Om te berekenen hoe dat gaat moeten we weten hoe twee protonen zo dicht bij elkaar kunnen komen dat de 'sterke kernkracht' ze bijeen bindt. Dit is een toepassing van de quantummechanica. We volgen de methode van Gamow om te schatting bij welke energie kernreacties in een ster het best verlopen.

De straling die in het binnenste van een ster wordt opgewekt ontsnapt uiteindelijk door het oppervlak. De temperatuur daar is wel veel lager dan in het centrum van de ster, maar toch nog vele duizenden kelvin. Om de energie die de ster verliest (de lichtkracht) te koppelen aan de temperatuur gebruiken wij de regel van Stefan-Boltzmann.

In het geval van het eenvoudige twee-schillenmodel zagen wij voor het eerst dat er een verband bestaat tusen de karakteristieke grootheden van een zelfgraviterende bol, zoals de massa, de straal en de temperatuur. Omdat de lichtkracht een functie is van de oppervlakte en de temperatuur, is er een verband tussen de massa en de lichtkracht van een ster.

In de astrofysica komt het vaak voor dat we willen uitrekenen hoe een deeltje zich gedraagt dat zeer veel botsingen ondergaat. Eerst moeten wij daarvoor uitrekenen wat de kans is dat het deeltje met een ander botst. De meest gebruikte maat hiervoor is de gemiddelde vrije weglengte. Hiervoor leiden we een eenvoudige formule af, die zeer veel toepassingen heeft. Voorlopig passen wij de formule toe op fotonen in een ster. Later zullen wij ook zien wat de vrije weglengte is voor sterren in sterrenstelsels en voor sterrenstelsels in het Heelal.

Een ster kan niet veel minder massa bevatten dan een tiende zonsmassa, want dan is het inwendige te koel voor kernfusie en straalt dus niet. Een ster die zwaarder is dan ongeveer honderd zonsmassa's daarentegen is zo heet dat hij door zijn eigen straling uitelkaar geblazen wordt. Dus zijn superzware sterren onmogelijk. Een sterrenstelsel zoals onze Melkweg wordt dus niet gedomineerd door een enkele massa, zoals ons Zonnestelsel, maar is een gravitationele 'democratie'. Als de gezamenlijke verdeling van de sterren in de ruimte ongeveer bolvormig is, kunnen wij de bekende vergelijkingen voor beweging onder invloed van een centrale kracht ook toepassen op sterrenstelsels.

Op zeer grote afstand, boven ongeveer een miljard jaar, is het Heelal isotroop: het ziet er in alle richtingen hetzelfde uit. Tenzij wij een zeer bijzondere plaats innenem in ruimte of tijd, betekent dit dat het Heelal ook homogeen is: op een gegeven tijdstip is de toestand overal in het Heelal gemiddeld hetzelfde. Daarom is een bol met een voldoende grote straal een goede afspiegeling van het Heelal als geheel. Hieruit volgt, dat het Heelal maar op één manier kan bewegen: door uniforme verandering van de ruimtelijke schaal. Zodoende kunnen wij onze oude bekende vergelijkingen voor beweging onder invloed van een centrale kracht ook hier gebruiken. De oplossingen zijn van hetzelfde type als tevoren, analoog aan de Kepler-oplossingen, maar nu voor rechtlijnige banen.

Bij nader inzien blijkt de Galilei-Huygens symmetrie niet exact te zijn. Daarvoor in de plaats komt Lorentz symmetrie, die de lichtsnelheid invariant laat. De wiskundige vorm van deze symmetrie wordt afgeleid naar analogie van de klassieke bewegingsvergelijkingen. Een paar eenvoudige toepassingen zijn: de tijddilatatie, het optellen van snelheden, en beweging met een constante versnelling.

Omdat de lichtsnelheid eindig en maximaal is, kan een globale symmetrie niet bestaan. Elke symmetrie moet lokaal zijn. Eerst berekenen we het interval, een grootheid die onveranderd blijft bij een globale Lorentztransformatie. We gaan over naar lokale symmetrie door te werken met differenties, analoog aan de werkwijze bij de klassieke mechanica. Lokale Lorentz-symmetrie leidt tot een structuur van tijd-ruimte die wordt beschreven met een soort afstandsrecept. De numerieke factoren in dat recept zijn samengevat in de metrische tensor.

Als voorbeeld van de structuur van tijd en ruimte bekijken wij de Schwarzschild-metriek, die het gedrag van bolsymmetrische zwarte gaten beschrijft. Door strikte toepassing van symmetrieregels leiden wij de bewegingsvergelijking af voor licht in de buurt van een zwart gat.

2. Deeltjes, ruimte en tijd

Als een buitenaards wezen onze planeet zou bezoeken, en ons zou vragen wat wij over het Heelal te weten zijn gekomen sinds we uit de bomen klommen, dan is het kortste antwoord: het Heelal bestaat uit deeltjes, ruimte en tijd. Op basis van deze schijnbaar eenvoudige zin kunnen we de hele natuurkunde reconstrueren, en alle sterrenkundige toepassingen daarvan. In dit college beperken wij ons tot de 'eerste levensbehoeften': de klassieke mechanica, een deel van de quantummechanica, stukjes thermodynamica, en relativiteitstheorie.

Het Heelal bestaat uit deeltjes, ruimte en tijd. Het samenspel daarvan vormt de gehele (astro)fysica. Een complete natuurkunde van deze drie ("theorie van alles") is er nog niet. We behelpen ons met enerzijds theorieën van deeltjes die zich in een vooraf gegeven ruimte bewegen (quantummechanica, veldentheorie), anderzijds met ruimte-tijdstructuren waarin deeltjes passief aanwezig zijn (algemene relativiteitstheorie).

Uit dagelijkse ervaring met materie weten we dat er deeltjes zijn. Er bestaan chemische `elementen` (H, O, S,... heel weinig soorten!), die in zeer weinig en zeer specifieke combinaties kunnen voorkomen. Bij het analyseren van (zuivere) stoffen vinden we nooit samenstellingen van het type $H_{2.4}O_{0.9}$, maar altijd (kleine) gehele getallen: H_2O, H_2SO_4, en dergelijke `quantumgetallen`. Uit de genetica weten we, dat erfelijke eigenschappen als herkenbare brokstukken worden doorgegeven (Mendel-wetten).

De beschrijving van deeltjes maakt gebruik van `complexe amplituden`, getallen van het type $e^{i\phi}$. Omdat we kunnen schrijven $e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\sin\phi$ vertonen deeltjes bepaalde soorten van gedrag die aan golven doen denken (bijvoorbeeld interferentie), maar het is onjuist om te zeggen 'deeltjes zijn golven'. Door dit golf-achtige gedrag kan een deeltje maar zeer weinig vaste toestanden aannemen, vandaar dat die quantumgetallen optreden, en vandaar dat deeltjes en moleculen *identiek* kunnen zijn en niet, zoals grote dingen (muizen en mensen) maar zo'n beetje op elkaar lijken.

Ruimte en tijd kunnen worden gemeten met dezelfde maat, namelijk de seconde, omdat de Natuur ons een absolute snelheid biedt: de lichtsnelheid is (locaal) onder alle omstandigheden hetzelfde (experiment van Michelson en Morley). Zo is de afstand tot de Maan 1.1 seconde, tot de Zon 8 minuten, tot de Andromeda Nevel 2 miljoen jaar.

Deze en verwante merkwaardigheden zijn te ingewikkeld voor dit college, en worden later uitgewerkt, bijvoorbeeld in de colleges quantummechanica, veldentheorie en relativiteitstheorie.

3. Symmetrie en klassieke mechanica

De regels van de mechanica zijn van zeer groot belang in de sterrenkunde. Het is dus essentieel om te weten waar die regels vandaan komen. Het blijkt dat de 'wetten' van de beweging voortkomen uit bepaalde regelmatigheden in de Natuur, 'symmetrie' genoemd. Dat zijn: homogeniteit van tijd en ruimte, en relativiteit van de snelheid. Uit deze symmetrieën leidt men de bewegingsvergelijkingen af. Bij deze afleiding blijkt dat wiskundige analyse niet gemist kan worden.

Om erachter te komen welke vergelijking(en) gebruikt kunnen worden om beweging van deeltjes te beschrijven moeten we eerst zien welke fysica moet worden ingebouwd. Op het eerste gezicht zou je denken dat de vergelijking voor de baan van een deeltje een *algebraïsche* vorm is, bv. de vergelijking van de parabool

$$y = a + bt + ct^2 \tag{3.1}$$

waarin y zoiets als de hoogte van een deeltje en t de tijd. Maar het blijkt dat het niet zo gaat. Dat komt doordat de absolute positie en de absolute snelheid van deeltjes in ons Heelal blijkbaar geen meetbare grootheden zijn: aan niets is af te lezen wat de ruimtelijke coördinaten van een deeltje zijn. Dat is geen 'principe' of zo; in de studeerkamer, afgesloten van de werkelijkheid, zouden we best een heelal kunnen verzinnen waarin deeltjes een soort inwendige kilometerteller hebben waarop je de plaats ervan kunt aflezen. Maar het Heelal waarin wij wonen werkt niet zo. In onze natuur geldt de `homogeniteit van de ruimte`: als je bij de positie van een deeltje een willekeurig vast getal optelt, verandert er niets. Dit komt neer op een globale verschuiving van het Heelal. Met andere woorden, er geldt blijkbaar een soort 'relativiteit van de ruimte': de waarde van een coördinaat als zodanig is niet waarneembaar. In formule luidt deze invariantie

$$\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r} + \vec{a} \tag{3.2} ♠$$

Dus is niet de absolute positie van een deeltje van belang, maar de *relatieve* plaats, in het bijzonder de verandering van de plaats in de loop van de tijd: de snelheid. Dus alleen het verschil in positie telt, vandaar dat de bewegingsvergelijking geen algebraïsche vergelijking voor de positie $\vec{r}$ is maar een *differentiaalvergelijking**[1] voor de verandering van de plaats, $d\vec{r}$, in een klein intervalletje van tijd, dt. Die verandering van plaats heeft een naam, de `snelheid`:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3} ♠$$

Merk op dat hierin niet alleen de homogeniteit van de ruimte is gebruikt (omdat we het *verschil* van twee posities bepalen), maar ook de homogeniteit van de tijd (omdat we door een tijdsverschil delen, en niet door een absolute tijdswaarde).

Nu zou je denken dat dan tenminste de vergelijking voor de snelheid v van een deeltje een algebraïsche vorm zou kunnen zijn, bijvoorbeeld

$$v = a + bt + ct^2 \tag{3.4}$$

maar ook dat is niet het geval. Dat komt doordat de absolute snelheid van deeltjes in ons Heelal blijkbaar geen meetbare grootheid is: aan niets is af te lezen wat de ruimtelijke snelheid van een deeltje is. Ook dat is geen 'principe'; in de studeerkamer kunnen we best een heelal verzinnen waarin deeltjes een soort inwendig wijzertje hebben waarop je de snelheid van het deeltje kunt aflezen. Maar het Heelal waarin wij wonen werkt niet zo. In onze natuur geldt de `Galilei-Huygens symmetrie`, dit is de invariantie

$$\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} + \vec{w} \tag{3.5} ♠$$

Als je bij de snelheid van een deeltje een willekeurige vaste waarde $\vec{w}$ optelt, verandert er niets. Met andere woorden, er geldt blijkbaar een soort 'relativiteit van de snelheid': de waarde van een snelheid als zodanig is niet waarneembaar. Dus is niet de absolute snelheid van een deeltje van belang, maar de *relatieve* snelheid, in het bijzonder de verandering van de snelheid in de loop van de tijd: de `versnelling`

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.6}$$

Omdat alleen het verschil in snelheid telt, is de bewegingsvergelijking geen algebraïsche vergelijking voor de snelheid $\vec{v}$, maar een *differentiaalvergelijking* voor de verandering van de snelheid, $d\vec{v}$.

Hogere symmetrieën zijn er blijkbaar niet, want we kunnen een versnelling wèl absoluut meten (experiment met draaiende emmer). Ook dat is iets wat ons door de Natuur wordt voorgeschoteld, en waarvan we nog niet weten wat de diepere achtergrond is. Omdat er blijkbaar niet zoiets bestaat als een 'relativiteit van versnelling' is de bewegingsvergelijking een tweede-orde differentiaalvergelijking, de klassieke `bewegingsvergelijking`

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{“iets”} \tag{3.7} ♠$$

*[1] Zie bijvoorbeeld W.T. van Horssen, *Differentiaalvergelijkingen*, Epsilon Uitgaven, Utrecht 1993; J. Grasman, *Wiskundige methoden toegepast*, Epsilon Uitgaven, Utrecht 1992.

waarin “iets” de versnelling ten gevolge van uitwendige invloeden. Dat kan van alles zijn; in dit college zullen wij zeer zwaar leunen op het voorschrift van de Newtonse zwaartekracht.

Om deze tweede-orde differentiaalvergelijking te kunnen oplossen, moeten wij dus zeven getallen invoeren: de beginpositie (drie stuks), de beginsnelheid (ook 3), en de begintijd. Die laatste doet er niet toe als de uitwendige versnelling niet van de tijd afhangt. Pas als we al deze gegevens hebben gekozen, kunnen we (in principe, tenminste) de vergelijkingen oplossen. Dat is dus heel iets anders dan een algebraïsche functie uitrekenen! Toch hebben veel mensen zo'n spoorrails-beeld in hun hoofd als ze aan bewegingen denken. We zien dat aardig terug in rare uitspraken van het type “het ruimtevoertuig is uit zijn baan geraakt.”

Een stel eenvoudige gevallen kunnen wij meteen oplossen. De meest voor de hand liggende is ‘iets is niets’:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \tag{3.8}$$

met de oplossing

$$\vec{v} = \text{constant} = \vec{v}_0 \ ; \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{3.9}$$

Met andere woorden, *een deeltje waarop geen kracht werkt, beweegt met constante snelheid.* Let op: snelheid is een vector, dus zowel de richting als de grootte van de snelheid blijven constant! Dit noemt men wel de `wet van de traagheid`. Die komt er dus uitrollen dankzij de symmetrieën die we in de bewegingsvergelijking hebben ingebouwd.

Oefening.

Van de klassieke oudheid tot de Middeleeuwen vond men niet de rechtlijnige beweging, maar de cirkelbeweging de ‘meest ideale’. Als je dit opvat in de zin van “een deeltje waarop geen kracht werkt, beweegt met constante snelheid *op een cirkel*” dan zegt dit iets over een soort vervanger van de Galilei-Huygens symmetrie. Probeer daarvoor eens een formulering te vinden.

De volgende vorm van de bewegingsvergelijking veronderstelt dat de uitwendige versnelling constant is:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \tag{3.10}$$

De oplossing hiervan is

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \tag{3.11}$$

Met andere woorden: bij constante versnelling neemt de snelheid vanaf een gegeven beginwaarde $\vec{v}_0$ lineair toe (of af) met de tijd t. Dit is een `eenparig versnelde beweging`. De vergelijking voor $\vec{v}$ is weer een differentiaalvergelijking voor $\vec{x}$, die we oplossen als

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \tag{3.12}$$

Als wij even aannemen dat $\vec{g}$ langs de y-as gericht is, vinden we de beroemde paraboolbaan

$$y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0) + \frac{g}{2v_x^2}(x - x_0)^2 \tag{3.13}$$

Galilei heeft daar zeer veel experimenteel onderzoek naar gedaan.

Wij zien hier het optreden van de `integratieconstanten` $\vec{v}_0$ en $\vec{r}_0$. Die komen er in omdat we zagen dat de ruimte homogeen is, dus de absolute positie van een voorwerp doet er niet toe in de bewegingsvergelijking; de ijking $\vec{x} = \vec{x}_0$ op tijd $t = 0$ moeten we dus achteraf vastleggen. Op soortgelijke manier moet ook de beginsnelheid $\vec{v}_0$ worden gegeven, omdat Galilei-Huygens symmetrie zegt dat absolute snelheden er niet toe doen. Dus hebben we een tweede-orde differentiaalvergelijking, die dan ook twee (vector-)constanten nodig heeft voor de oplossing.

4. Energie en impuls

Bij iedere symmetrie hoort een grootheid die niet verandert. In de klassieke mechanica zijn dat de energie en de impuls. De klassieke bewegingsvergelijking heeft in het rechterlid nul, in het geval dat er geen uitwendige krachten werken. Dit leidt tot behoud van impuls. De vergelijking kan in alle gevallen eenmaal worden geïntegreerd. Zo ontstaat een vorm waaruit blijkt dat een bepaalde grootheid bij de beweging hetzelfde blijft. Dit is de behoudswet voor de energie.

Om de bewegingsvergelijking op te lossen moeten we dus twee integratie-stappen ondernemen. Dat is niet altijd eenvoudig; sterker nog, in de meeste gevallen gaat het niet en moeten we numerieke methoden gebruiken. Maar één stap is altijd uit te voeren, namelijk het vinden van de energie-integraal. Kijken we eerst naar één dimensie. Dan hebben we

$$\frac{dv}{dt} = a \tag{4.1}$$

Dit kunnen we even anders schrijven met de truc (wiskundig behoeft dit nog wel wat onderbouwing!)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dr} \times \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\frac{dv}{dr} = a \tag{4.2}$$

Nu weten we dat, per definitie, $dr/dt = v$ en dus

$$v\,\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\,\frac{dv^2}{dr} = a \tag{4.3}$$

en zodoende

$$\frac{1}{2}v^2 = \mathcal{E} + \int a\,dr \tag{4.4}$$

De constante $\mathcal{E}$ is de energie per massa-eenheid. We kunnen dan schrijven

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \int ma\,dr = \text{constant} \equiv E \tag{4.5 ♠}$$

Deze constante is de 'eerste integraal' van het mechanische systeem, een grootheid die tijdens de beweging onveranderd blijft. Men beschrijft de vorm Eq.(4.5) weleens met de woorden 'kinetische energie plus potentiële energie is constant'. De hier gegeven schets is wat kort door de bocht en er zijn hier veel meer en veel nauwkeuriger dingen over te zeggen, maar daarvoor wordt verwezen naar de colleges klassieke mechanica. Voor de toepassingen hier is de vorm Eq.(4.5) bijna altijd voldoende.

Uit Eq.(4.1) kunnen wij nog een behoudswet afleiden, die geldt voor een systeem van deeltjes waarop geen netto kracht werkt. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer de krachten alleen maar tussen de deeltjes onderling werken. Voor elk deeltje, met rangnummer i, geldt

$$m_i\,\frac{dv_i}{dt} = m_i a_i = F_i \tag{4.6}$$

Nu sommeren we over alle deeltjes, en vinden dan

$$\sum_i m_i\,\frac{dv_i}{dt} = \sum_i F_i = F_{\text{tot}} \tag{4.7}$$

In een afgesloten systeem is per definitie de totale kracht F_{tot} nul, en dus is de totale impuls P, gedefinieerd door

$$P \equiv \sum_i m_i v_i = \text{constant} \tag{4.8 ♠}$$

constant. Merk op dat wij hier stiekem verondersteld hebben dat alle m_i constant zijn, maar men kan bewijzen dat dit niet hoeft, en dat toch de behoudswet Eq.(4.8) geldt. Bij dit bewijs, dat het makkelijkst te leveren is met de 'Lagrange-methode', wordt gebruik gemaakt van de translatie-symmetrie van de ruimte.

5. Vorm van planeten

Gewapend met de vergelijkingen van de klassieke mechanica gaan we het Heelal proberen te begrijpen. Het uiteindelijke doel is, te berekenen hoe astronomische dingen zich gedragen. Het eenvoudigst is, om daarbij te beginnen met dingen in evenwicht, zoals planeten en sterren. Eerst bezien wij de structuur van planeten, in evenwicht tussen enerzijds hun zwaartekracht en anderzijds de druk van de materie waaruit zij zijn gebouwd. Hier berekenen we de sterkte van de materie uit een simpele schatting van materiaalsterkte.

Waarom is de Aarde een bol? Had Columbus dat kunnen uitrekenen, inplaats van het gewoon te geloven? Een te steile berg zakt onder zijn eigen gewicht in elkaar, dus we verwachten dat Aarde niet al te puntig kan zijn. Maar is er ook een maximale hoogte aan bergen? Hoe hoog moet een berg zijn voordat de zwaartekracht hem verpulvert?

Een eenvoudige schatting is te maken met behulp van een garendraad. We formuleren de vraag even een klein beetje anders: hoe hoog moet een berg zijn voordat hij breekt onder zijn eigen gewicht? Hoe lang moet een garendraad zijn voordat die breekt onder zijn eigen gewicht? De breeksterkte van garen is wel te schatten. 't Is vast meer dan 100 gram en minder dan 10 kilo; een pak melk kan wel zowat aan een draadje hangen, maar niet veel meer. Dus we schatten dat de breekkracht 1 kg is. Hoe lang is een kilogram draad? Op een gewoon garenklosje zit 500 meter, en zo'n klosje weegt – wel, meer dan 10 gram en minder dan een kilo, iets minder dan een ons: laten we zeggen 50 gram (maar let op het gewicht van het lege klosje). Dus een kilo garen is 10 km lang. Conclusie: een garendraad van 10 km breekt door zijn eigen gewicht. Dat is dan ook een schatting voor de hoogte van de hoogste berg, maar breeksterkte is niet hetzelfde als treksterkte, rots is misschien sterker (of zwakker!) dan garen, enzovoorts. Maar het principe blijft: op grond van recht-voor-z'n-raapse schattingen van dit type komt de astrofysicus al heel snel de essenties op het spoor.

We kunnen dit wat nauwkeuriger uitrekenen. Twee puntmassa's m en M op afstand r van elkaar trekken elkaar aan met een kracht die langs hun verbindingslijn is gericht, en die een grootte heeft die wordt gegeven door

$$F = -\frac{GmM}{r^2} \tag{5.1}$$ ♠

Dit is een eendimensionale vorm van de `regel van Newton` voor de zwaartekracht. Laat gegeven zijn een homogene bol met massa M_1 en straal r_1, en een dichtheid ρ kilogram per kubieke meter. Bouw op die bol een half-bolvormige berg uit hetzelfde materiaal, met massa M_2 en straal r_2, die we veronderstellen veel kleiner dan r_1 te zijn. Voor de massa's geldt dus dat

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3 \quad ; \qquad M_2 = \frac{2}{3}\pi\rho r_2^3 \tag{5.2}$$

Dan trekken zij elkaar aan met een kracht (op kleinigheden na) gelijk aan

$$F = G\frac{M_1 M_2}{r_1^2} \tag{5.3}$$

De druk P op het contactvlak is dan gelijk aan die kracht gedeeld door het oppervlak dat contact maakt:

$$P = G\frac{M_1 M_2}{r_1^2}\frac{1}{\pi r_2^2} \tag{5.4}$$

Stoppen we alle gegevens bij elkaar, dan komt er

$$P = G r_1 r_2 \frac{1}{\pi}\frac{M_1}{r_1^3}\frac{M_2}{r_2^3} = \frac{8\pi}{9}G\rho^2 r_1 r_2 \tag{5.5}$$

De waarden van P en ρ worden bepaald door de eigenschappen van het materiaal waaruit de bollen gemaakt zijn. Hoe dan ook, bij een bepaald soort materie vinden we dat de hoogte r_2 van de berg gegeven wordt door

$$r_2 = \frac{\beta}{r_1} \tag{5.6}$$

waarin β een of andere constante. Voor de Aarde vinden we dat r_2 ongeveer 10 kilometer is, en $r_1 =$ 6372 km, zodat

$$\beta \approx 6.4 \times 10^{10} \quad \mathrm{m}^2 \tag{5.7}$$

(het symbool $\approx$ betekent "ongeveer gelijk aan"). Als we dit extrapoleren naar andere objecten, dan zien we dat r_1 ongeveer gelijk is aan r_2 (dwz. de berg heeft een hoogte vergelijkbaar met de afmeting van het centrale object: sterke afwijking van de gemiddelde bolvorm) als de afmeting r zowat gelijk is aan de wortel uit β, ofwel

$$r_1 \approx \sqrt{\beta} = 255 \quad \mathrm{km} \tag{5.8}$$

We schatten dus dat lichamen veel groter dan zo'n 200 à 300 km bolvormig zullen zijn, en kleinere objecten onregelmatiger.

Bij de vergelijking voor $r_1 r_2$ merken we nog op dat die iets anders kan worden geschreven, namelijk door omvormen van β:

$$r_1 r_2 = \frac{9}{8\pi} \frac{P}{G\rho^2} = \frac{9}{8\pi} \frac{1}{G\rho} \frac{P}{\rho} \tag{5.9}$$

Wij bezien zo'n vergelijking dus van een natuurkundig standpunt, en niet als een wiskundige. We merken nu op dat met het product van G en ρ een grootheid kan worden gevormd die een *tijdschaal* voorstelt:

$$\frac{1}{\sqrt{G\rho}} = t = \text{karakteristieke tijd} = \begin{cases} \text{vrije valtijd} \\ \text{trillingsperiode} \\ \text{baanperiode} \end{cases} \tag{5.10} \spadesuit$$

Voorts kan uit P en ρ een *snelheid* worden gemaakt:

$$\sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = s = \text{geluidssnelheid} \tag{5.11} \spadesuit$$

De constante γ is de *index van Poisson* en is, in een eenatomig gas, gelijk aan 5/3. Aldus analyserend zien we dat

$$r_1 r_2 \approx t^2 s^2 \tag{5.12}$$

ofwel, in woorden uitgedrukt (en na de kwadraten te hebben verwijderd door worteltrekking):

$$\text{afmeting} \approx \text{vrije valtijd} \times \text{geluidssnelheid} \tag{5.13}$$

Deze relatie zullen we later terugzien als het `Jeans criterium`:

$$\frac{\text{afmeting}}{\text{geluidssnelheid}} \approx \text{vrije valtijd} \tag{5.14}$$

Met andere woorden: als de vrije-valtijd korter is dan de tijd die een drukgolf (geluidsgolf) nodig heeft om een voorwerp over te steken, is dat voorwerp niet stabiel en zal ineenstorten.

Ook P/ρ kan nader bekeken worden. Uit de thermodynamica weten we dat

$$PV = NkT \tag{5.15} \spadesuit$$

Het aantal deeltjes N houdt verband met de massadichtheid ρ; immers, als μ de massa per deeltje is, dan geldt

$$\frac{\mu N}{V} = \rho \tag{5.16}$$

Dus vinden we

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T = 8254.63\,\rho T \quad \mathrm{J\,m^{-3}} \tag{5.17}$$ ♠

Door vergelijken met het bovenstaande zien we direct dat het kwadraat van de geluidssnelheid evenredig is met de temperatuur.

Als we P willen schatten uit de breeksterkte van materie, dan merken we op dat de energie per atoom in materie zowat gelijk is aan één electronvolt per deeltje (daarom komt er uit een enkelvoudig staafbatterijtje nooit meer spanning dan 1 à 2 volt; een 9V batterij blijkt bij openmaken uit diverse kleinere batterijtjes te bestaan). Een gasdruk is gelijk aan een energiedichtheid; de afstand tussen atomen in aardse materie is zowat een nanometer (10^{-9} m), er zijn er dus ruwweg 10^{27} per kubieke meter, en zodoende is de maximale druk die materie kan opbrengen te schatten als

$$P \approx 1\mathrm{eV}\ \times\ \text{aantal deeltjes per kuub} \approx 1.6022 \times 10^{-19} \times 10^{27} = 1.6 \times 10^{8} \quad \mathrm{J\,m^{-3}} \tag{5.18}$$

(een batterij van een kubieke centimeter bevat dus 1600 joule; klopt dat zowat?) De massadichtheid van materiaal aan het aardoppervlak is ongeveer drie ton per kuub, en als dit niet al te veel van het gemiddelde afwijkt kunnen we schatten

$$\rho \approx 3 \times 10^{3} \quad \mathrm{kg\,m^{-3}} \tag{5.19}$$

Uiteindelijk vinden we dan

$$\beta = \frac{9P}{8\pi G\rho^2} = 9.54 \times 10^{10} \quad \mathrm{m^2} \tag{5.20}$$

Volgens deze berekening zou de hoogste berg op Aarde dus 15 km kunnen zijn.

Oefening.

1) Wat is de maximale hoogte van bergen op de Maan, op Ceres, en op de komeet van Halley? 2) Bekijk plaatjes van asteroïden en satellieten, en schat hun afmetingen uit hun vorm. U zult merken dat ze eigenlijk ronder en gladder zijn dan zou kunnen. Hoe zou dat kunnen komen? 3) Hoe groot kan een appel zijn zonder zijn vorm te verliezen? En het steeltje? 4) Hoe hoog kan een berg in het *inwendige* van de Aarde zijn? Is de Aarde van binnen wel een bol?

6. Een twee-schillenmodel

Nu we eenmaal weten dat een voldoende grote massa bolvormig is, kunnen we schatten wat de inwendige structuur van zo'n bol is. Wij doen dat door de bol in twee delen te splitsen: een schil en een pit, met allebei dezelfde dikte en massa. Wij berekenen een verband tussen de massa, straal, dichtheid, temperatuur en andere eigenschappen van de bol. Later zullen wij zien dat deze schattingen verrassend realistisch zijn.

Het probleem van de hoogste berg kunnen we nu iets algemener bekijken. Blijkbaar is het zo dat de zwaartekracht van een voorwerp het glad kneedt; we kunnen er dus niet aan ontkomen het hele voorwerp als een zelfstandig en zelf-graviterend systeem te bekijken. Omdat we al zagen dat elk object van betekenis vanzelf bolvormig wordt, veronderstellen we meteen dat we met een bolvormig voorwerp te maken hebben. Het op te lossen probleem is dus vrij eenvoudig: de buitenlagen drukken door hun zwaarte op verder naar binnen gelegen lagen, en die weer op lagen daaronder, enzovoorts, tot aan het centrum van de bol. De bol kan in evenwicht blijven als er voldoende tegendruk is. Laten we die druk eens berekenen door de bol brutaalweg in twee concentrische helften te splitsen: een deel tussen straal $r = 0$ (het centrum) en straal $r = R/2$, en een deel van $r = R/2$ tot $r = R$ (het oppervlak). We nemen aan dat de massa's van de binnenste bol en de daarop liggende dikke schil gelijk zijn. Ze trekken elkaar aan met een kracht

$$F = G\frac{(M/2)^2}{(R/2)^2} = \frac{GM^2}{R^2} \tag{6.1}$$

In het vorige hoofdstuk hebben wij de zwaartekracht in evenwicht gehouden met behulp van de materiaalsterkte. Wij gaan dat nu wat algemener aanpakken, en stellen dat de deeltjes onderling elkaar afstoten en zodoende een *druk* uitoefenen. De druk die de buitenlaag op de binnenbol uitoefent is de kracht gedeeld door het oppervlak, en dus

$$P = \frac{F}{4\pi(R/2)^2} = \frac{GM^2}{\pi R^4} \tag{6.2}$$

Merk overigens op dat de veronderstelling dat de straal zowel als de massa in tweeën wordt gedeeld, betekent dat de dichtheid van de binnenbol niet hetzelfde is als die van de buitenschil:

$$\rho_{\rm in} = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi(R/2)^3} = \frac{3M}{\pi R^3} \tag{6.3}$$

$$\rho_{\rm uit} = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R/2)^3} \tag{6.4}$$

en dus vinden we de verhouding

$$\frac{\rho_{\rm in}}{\rho_{\rm uit}} = 7 \tag{6.5}$$

Uit Eq.(6.2) zien we dat de druk in een zelfgraviterende bol op eenvoudige wijze schaalt met de massa en met de afmeting. Merk wel op dat P zeer sterk van R afhangt: met de vierde macht!

Oefening.

Wat is de druk ten gevolge van de eigen gravitatie in een appel? In de komeet van Halley? In de Aarde? In de Zon?

De druk kunnen wij nu niet meer simpelweg schatten door een wisselwerkings-energie van ongeveer 1 eV per deeltje te postuleren. In plaats daarvan moet P volgen uit de gemiddelde eigenschappen van de materie, dus uit *thermodynamische* overwegingen. Hierbij komen onder andere de temperatuur T en de dichtheid ρ van de materie te pas. Een formule die de grootheden P en ρ met elkaar verbindt heet een `toestandsvergelijking`, die dus in de plaats komt van de simpele schatting '1eV per deeltje'.

Nu we eenmaal de druk hebben berekend, kunnen we ook andere thermodynamische grootheden schatten. Door de druk uit de ideale gaswet

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T \tag{6.6} \spadesuit$$

gelijk te stellen aan de waarde die we vonden in Eq.(6.2) berekenen we dat, in het binnenste van de bol,

$$\frac{k}{\mu}\rho T_{\rm in} = \frac{GM^2}{\pi R^4} = \frac{k}{\mu}\frac{3M}{\pi R^3}T_{\rm in} \tag{6.7}$$

waaruit na wat schuiven volgt dat

$$T_{\rm in} = \frac{G\mu}{3k}\frac{M}{R} \tag{6.8} \spadesuit$$

Voor de Aarde, met een massa van 5.976×10^{24} kg en een straal van 6.371×10^6 m, vinden we dan een geschatte inwendige temperatuur van 2525 K.

Oefening.

Gebruik Eq.(6.8) en bereken de inwendige temperatuur van een meloen, van een mens, van Jupiter, en van de Zon. Wat is de temperatuur van een bol met een massa zo groot als de Melkweg? Vergelijk de berekende getallen met de waargenomen waarden. Wat is de oorzaak van de (soms enorme) verschillen?

---

7. De vergelijking van Emden

Nu gaan we de structuurformule van een zelf-graviterende bol uitbreiden naar zware dingen zoals sterren. Natuurlijk bestaat een planeet of een ster niet uit een simpele schil en een pit daarbinnen. Op basis van precies dezelfde aanpak kunnen we het veel beter doen: we nemen niet twee schillen, maar stapelen er oneindig veel op. Uiteraard leidt dat tot een differentiaalvergelijking voor de structuur van de bol. De oplossing hiervan is erg ingewikkeld, maar een schatting van de bijbehorende fysische grootheden levert een uitkomst die sterk lijkt op het twee-schillenmodel. In de hier gegeven beschrijving zijn sterren in evenwicht doordat er in hun binnenste een zeer hoge temperatuur heerst, dat wil zeggen snelle chaotische bewegingen van de atomen. Later komen wij een soortgelijke aanpak tegen bij de structuur van sterrenstelsels, die in evenwicht zijn door de chaotische bewegingen van hun sterren.

Het is natuurlijk veel te grof om de structuur van een zelfgraviterende bol uit te rekenen door het ding brutaalweg in twee zones te splitsen. Eigenlijk zou je een oneindig aantal oneindig dunne lagen op elkaar moeten stapelen om te zien wat er gebeurt. Dat betekent dat we een limiet gaan bekijken voor zeer veel infinitesimale schillen, en we verwachten dus een *differentiaalvergelijking* te krijgen: dat wordt de vergelijking van Emden.

Inplaats van een enkele pit omgeven door een homogene schil, gaan wij nu de bol opbouwen door schillen op elkaar te stapelen. De zwaartekracht moet worden gecompenseerd door een aanpassing van de druk (drukgradiënt). De naar binnen gerichte zwaartekracht F, die werkt op een bolschil met massa ΔM, is

$$F = -\frac{GM\,\Delta M}{r^2} \tag{7.1}$$

In evenwicht moet deze gelijk en tegengesteld zijn aan de kracht die de gasdruk uitoefent. Als aan de binnenkant van de schil de druk P_2 is, en aan de buitenkant P_1, dan is de netto overblijvende extra drukkracht gelijk aan $P_2 - P_1 = \Delta P$ vermenigvuldigd met het oppervlak waarop de druk werkt, dus

$$4\pi r^2 \Delta P = -\frac{GM}{r^2}\Delta M \tag{7.2}$$

Hierin is $M = M(r)$ de massa die zich binnen de bol met straal r bevindt. Die massa neemt toe met ΔM als we weer een schilletje opstapelen. Immers, de massa van een schil is gelijk aan het volume ervan maal de dichtheid van de materie:

$$\Delta M = 4\pi r^2 \rho\, \Delta r \tag{7.3}$$

Zodoende vinden we uit Eq.(7.1) dat

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} \tag{7.4}$$

ofwel, in de limiet voor verdwijnend kleine schildikte Δr,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = G\frac{M(r)}{r^2} \tag{7.5} ♠$$

Dit is de vergelijking van het `hydrostatisch evenwicht` in een bol.

We hebben nu een enkele vergelijking, maar daarin komen drie onbekenden voor: P, ρ en M. Dat is dus niet genoeg. Maar het probleem kan worden opgelost met behulp van Eq.(7.3) door Eq.(7.5) eerst te schrijven als

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = -GM(r) \tag{7.6}$$

Nu bekijken we een kleine verandering Δ van deze hele uitdrukking (we differentiëren dus),

$$\Delta\left[\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right] = -G\Delta M \tag{7.7}$$

We roepen Eq.(7.3) te hulp en vinden in de limiet voor $\Delta r \to 0$ dat

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2 \tag{7.8}$$

Nu moeten we nog een verband vinden tussen de dichtheid ρ van de materie en de druk P; dit is een zogenaamde `toestandsvergelijking`. Voor vaste stof kan dat knap ingewikkeld zijn, maar voor gassen is het veel eenvoudiger. Het blijkt dat in een groot aantal gevallen geldt

$$P = \kappa\,\rho^\gamma \tag{7.9} \spadesuit$$

waarin κ een constante die evenredig is met de logaritme van de entropie, en γ een andere constante, de `Poisson-constante`. Voor een ideaal enkel-atomig gas is $\gamma = 5/3$. Voor een relativistisch gas is $\gamma = 4/3$. Voor een isotherm gas is $\gamma = 1$, wat direct is in te zien omdat we ook de ideale gaswet hebben,

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T \tag{7.10} \spadesuit$$

en dus is $P \propto \rho$ als T constant is, hetgeen meteen betekent dat dan $\gamma = 1$.

Wanneer we nu Eq.(7.9) invullen in Eq.(7.8) komt er tenslotte

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{d\rho^\gamma}{dr}\right) = -\frac{4\pi G}{\kappa}\rho r^2 \tag{7.11}$$

en dit is een enkele vergelijking voor één onbekende, en kan dus in principe opgelost worden. Dit is de `vergelijking van Emden` (die men in de vakliteratuur meestal nog iets anders schrijft, maar dat terzijde).

Het is te ingewikkeld om hier deze vergelijking op te lossen. Maar we kunnen nog wel een verband leggen met Eqs.(5.5-9) voor de hoogte van bergen. Het gaat hier om een aanpak die vaak zeer nuttig is om te weten te komen wat de karakteristieke grootheden van een probleem zijn: namelijk de methode van het `dimensieloos maken`. Bekijken we Eq.(7.8) , dan zien we dat daarin drie variabelen voorkomen, namelijk P, ρ en r, en een constante, te weten G. Elk van die vier heeft een fysische dimensie, hetgeen betekent dat er grootheden in voorkomen die de fysische toestand karakteriseren. Het verband daartussen kunnen we op het spoor komen door *elk van de variabelen te schrijven als een veelvoud van een karakteristieke fysische grootheid*. Laat bijvoorbeeld r_0 een lengtemaat zijn die kenmerkend is voor de hydrostatische bol die we aan het bekijken zijn; we verwachten natuurlijk dat r_0 zoiets is als de straal van de bol, of althans een redelijke schatting daarvan. Dan kunnen we inplaats van de variabele r schrijven

$$r = r_0 \times \frac{r}{r_0} \equiv r_0 x \tag{7.12}$$

Dit is volkomen triviaal, maar nu beschouwen we r/r_0 als variabele in onze vergelijking. Deze is *dimensieloos*: een lengte gedeeld door een lengte. Het dimensionele gedrag van de vergelijking is nu overgedragen op de constante r_0. Noemen we, zoals boven, $r/r_0 = x$, dan vinden we in plaats van Eq.(7.8)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\rho}\frac{dP}{dx}\right) = -4\pi G r_0^2\,\rho x^2 \tag{7.13}$$

Op soortgelijke manier schrijven we nu

$$\rho = \rho_0 \times \frac{\rho}{\rho_0} \equiv \rho_0 Y \tag{7.14}$$

$$P = P_0 \times \frac{P}{P_0} \equiv P_0 Z \tag{7.15}$$

Daarmee wordt Eq.(7.13)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{Y}\frac{dZ}{dx}\right) = -4\pi G\frac{r_0^2\rho_0^2}{P_0}\ Yx^2 \tag{7.16}$$

Tenslotte merken we op dat we volkomen vrij zijn in het kiezen van de verhoudingen tussen de constanten met index 0; het is dan natuurlijk handig om te kiezen

$$4\pi G\frac{r_0^2\rho_0^2}{P_0} \equiv 1 \tag{7.17}$$

zodat de structuurvergelijking voor onze bol overgaat in

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{Y}\frac{dZ}{dx}\right) = -Yx^2 \tag{7.18}$$

Op deze manier hebben we *alle dimensionele grootheden weggecijferd*, en opgesloten in de uitdrukking Eq.(7.17) hetgeen veel overzichtelijker is. In het bijzonder zien we dat we verwachten dat er een verband bestaat tussen de karakteristieke afmeting r_0 van de bol, de druk P_0 en de dichtheid ρ_0, volgens

$$r_0^2 = \frac{1}{4\pi G\rho_0}\frac{P_0}{\rho_0} \tag{7.19}$$

Gaan we nu terug naar Eq.(5.9) dan zien we dat die geschreven kan worden als

$$r_1 r_2 = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{4\pi G\rho}\frac{P}{\rho}\right) \tag{7.20}$$

Op een factortje 9/2 na, is dit exact hetzelfde! We zien dus dat de schattingen over de maximale berghoogte een nauw verband hebben met de exacte vergelijking voor de structuur van een zelfgraviterende bol. We leren hier onder andere uit, *dat wiskundige vergelijkingen veel meer zijn dan een regeltje om in je computer te proppen.*

8. Beweging in cylindercoördinaten

Nu gaan we over naar de dynamica: de snelheden zijn nu niet meer nul. De krachten worden niet in evenwicht gehouden door een tegengestelde kracht. In alles wat volgt zullen wij meestal werken met krachten die naar een vast punt zijn gericht. Bij zo'n centrale kracht is het niet handig om in rechthoekige (Cartesische) coördinaten te werken. Cylindercoördinaten zijn een stuk beter. Hierbij blijkt dat de lineaire algebra zeer goede diensten bewijst om zulke veranderingen van coördinaten snel en efficiënt te berekenen.

In het bovenstaande zagen wij, hoe de differentiaal- en integraalrekening (*calculus*) in de mechanica een centrale rol speelt, en ook waarom: vanwege de homogeniteit van ruimte en tijd, en vanwege de Galilei-Huygens symmetrie, zijn het niet plaats, tijd, en snelheid, maar hun verschillen (afgeleiden) die door de bewegingsvergelijking worden voorgeschreven.

In dit hoofdstuk zien we waarom een ander deel*2 van de wiskunde, de *lineaire algebra*, zo nuttig is bij de beschrijving van de Natuur. Deels zagen wij dat al: immers, de ruimte is driedimensionaal (later

*2 Zie bijvoorbeeld J. Grasman, *Wiskundige methoden toegepast*, Epsilon Uitgaven, Utrecht 1992, Hoofdstuk 5; G.E. Hay, *Vector and tensor analysis*, Dover, New York, 1953.

zullen we spreken over de vierdimensionale tijdruimte), zodat de plaats $\vec{r}$ van een deeltje een 3-vector is. Bijvoorbeeld in Cartesische coördinaten schrijven we

$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{8.1}$$

en zodoende zijn ook snelheid en versnelling 3-vectoren. Je zou natuurlijk altijd de hele boel in drie componenten kunnen uitschrijven, en voor numerieke berekeningen is dat ook de aangewezen weg. Maar een nadeel is dat je dan steeds eerst je coördinatenstelsel moet kiezen, en de formules worden bar onoverzichtelijk. Daarom zijn de methoden van de lineaire algebra veel handiger.

Met 'handig' bedoel ik hier het soort handigheid die een fysicus goed van pas komt, en dat is lang niet hetzelfde als de strenge wiskundige aanpak via axioma's en bewijzen. Neem bijvoorbeeld het optellen van vectoren. In iedere coördinaatrichting i geldt, dat wij een nieuwe positie r_i kunnen vinden door twee andere bij elkaar op te tellen:

$$\begin{aligned} r_1 &= a_1 + b_1 \\ r_2 &= a_2 + b_2 \\ r_3 &= a_3 + b_3 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dat is natuurkundig niet triviaal, en volgt uit de homogeniteit van de ruimte. In rij-notatie kunnen wij ditzelfde schrijven als

$$(r_1, r_2, r_3) = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \tag{8.3}$$

en in vectornotatie wordt dit

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \tag{8.4}$$

Dat staat een stuk overzichtelijker dan steeds een vector helemaal uit te schrijven in een rij getallen. De vraag is nu of we een compact stel rekenregels kunnen opstellen voor vectoren, die van dezelfde vorm zijn als die welke wij voor de 'gewone' getallen (gehele, rationele, reële, complexe) gewend zijn. Dat kan, en zelfs meer; daarvoor is de lineaire algebra ontworpen.

Zeer naïef zou je kunnen proberen om een vermenigvuldiging van getallen, van het type

$$a\,b = c \tag{8.5}$$

tot rijtjes van getallen uit te breiden. We veronderstellen dat we twee vectoren van het soort Eq.(8.3) 'vermenigvuldigen' door de individuele getallen paarsgewijs met elkaar te vermenigvuldigen. Je vraagt je dan meteen af: welk getal met welk? Bij gebrek aan dwingende redenen tot kiezen, zouden we kunnen antwoorden: allemaal met allemaal. Wij beperken ons tot vectoren met gelijke lengte en bestaande uit hetzelfde type getallen (dat is al niet eens triviaal), en stellen

$$\text{`product'} = \sum_{i,j} \mathcal{M}\, a_i b_j \tag{8.6}$$

Hierin is $\mathcal{M}$ een of andere vermenigvuldigingsfactor. Die is absoluut nodig, want uit Eq.(8.6) zie je meteen dat het botweg gedefinieerde 'product' helemaal geen getal hoeft te zijn van hetzelfde type als a_i en b_j. Wij moeten dus $\mathcal{M}$ zo kiezen dat het 'product' een handelbaar getal is. Stel bijvoorbeeld dat we willen dat het 'product' een getal is van hetzelfde type als a en b, zeg een reëel getal. Dan schrijven we

$$P = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, a_i b_j \tag{8.7}$$

Het symbool δ_{ij}, de `Kronecker delta`, is alsvolgt gedefinieerd:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{in alle andere gevallen} \end{cases} \tag{8.8}$$

Het zo gedefinieerde product heet het `inwendig product` of `inproduct`, weergegeven door de product-operator "·":

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j} \delta_{ij}\, a_i b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots \tag{8.9}$$

Het inproduct heeft talloze handige eigenschappen. Ga zelf na dat het een *lineair* product is. Wij kunnen het gebruiken om de lengte L van een vector te vinden:

$$a \equiv |a| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \tag{8.10}$$

hetgeen niets anders is dan een generalisatie van onze oude bekende Pythagoras. De cosinus van de hoek ϕ tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vind je uit

$$\cos\phi = \frac{1}{ab}\, \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{8.11}$$

Inplaats van Eq.(8.7) kunnen we eisen dat het product P niet een getal is, maar zelf weer een vector. Je ziet dan meteen dat het vermenigvuldigingsgetal $\mathcal{M}$ *drie* indices zal moeten hebben, en dat het zo gevormde vectorproduct alleen handelbare eigenschappen heeft in de drie-ruimte. Dan komt er

$$P_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j \tag{8.12}$$

waarin de 'volledig antisymmetrische factor' ϵ zo gekozen is dat

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \neq j \neq k \text{ en } \{ijk\} \text{ even permutatie} \\ -1 & \text{als } i \neq j \neq k \text{ en } \{ijk\} \text{ oneven permutatie} \\ 0 & \text{in alle andere gevallen} \end{cases} \tag{8.13}$$

Het zo gedefinieerde product heet het `uitwendig product` of `uitproduct`, weergegeven door de product-operator "×":

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \vec{a} \times \vec{b} \\ P_k &= \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\, a_i b_j = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned} \tag{8.14}$$

De vector $\vec{P}$ staat loodrecht op het vlak opgespannen door $\vec{a}$ en $\vec{b}$, zodanig dat $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{P}$ in die volgorde een rechtshandig stelsel vormen. De lengte P voldoet aan

$$P = ab \sin\phi \tag{8.15}$$

waarin ϕ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Hoe we dit alles kunnen gebruiken zien wij bijvoorbeeld in het geval van bewegingen onder invloed van een `centrale kracht`, dat wil zeggen een kracht die altijd naar een vast punt in de ruimte is gericht. Je ziet meteen dat zo'n kracht niet translatie-invariant is: er is immers een punt dat anders is dan alle andere punten in de ruimte, namelijk het punt waarnaar de kracht wijst! Laat de versnelling ten gevolge van die centrale kracht gegeven zijn door de vector $\vec{g}$, dan is de bewegingsvergelijking

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \tag{8.16}$$

Het is uiteraard handig om de oorsprong van je coördinatenstelsel in dat speciale punt te kiezen. Dan is $\vec{g}$ evenredig met $\vec{r}$, en dus

$$\vec{g} = g(r)\, \vec{e} \tag{8.17}$$

waarin $\vec{e}$ de eenheidsvector in de richting van $\vec{r}$. Het feit dat $\vec{g}$ in de richting van $\vec{r}$ wijst, buiten we nu uit door het uitproduct te nemen[*3] van Eq.(8.16) met $\vec{r}$. We hebben uiteraard

$$\vec{r} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{e} = \vec{r} \times \vec{g} = 0 \tag{8.18}$$

en zodoende

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{8.19}$$

Deze vergelijking integreren we over de tijd. Dan komt er

$$\int \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = \text{constant} \tag{8.20}$$

De speciale vorm van de uitwendige kracht, namelijk dat de kracht steeds naar een vast punt gericht is, betekent een bijzondere beperking, een *symmetrie*. Bij iedere symmetrie behoort een `behoudswet`, die wij aanstonds zullen afleiden. Het algemene verband tussen symmetrie en behouden grootheden is vastgelegd in de `Stelling van Noether`, een van de fundamenten van de moderne natuurkunde. In het geval van een centrale kracht rekenen we alsvolgt. De integraal in Eq.(8.20) kan worden omgeschreven met behulp van de kettingregel

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.21}$$

Maar we wisten al dat

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0 \tag{8.22}$$

en zodoende kunnen wij Eq.(8.20) schrijven als

$$m\,\vec{r} \times \vec{v} = \vec{J} \tag{8.23}$$

waarin m de massa van het versnelde deeltje en $\vec{J}$ een constante vector. Deze heet `impulsmoment`, omdat Eq.(8.23) een uitdrukking is voor het 'moment' (uitproduct) van de voerstraal $\vec{r}$ en de impuls $m\vec{v}$.

Met behulp van de lineaire algebra hebben wij dus bewezen: *bij beweging onder invloed van een centrale kracht is het impulsmoment constant*, een zeer belangrijke behoudswet die – zoals wij nog zullen zien – de vorm bepaalt van zeer veel astronomische objecten, van ons Zonnestelsel tot de Melkweg en verder.

Uit de behoudswet Eq.(8.23) kunnen we meteen een belangrijke eigenschap afleiden van de vorm van banen in een centraal krachtveld. Want wij kunnen (wegens de eigenschappen van het uitproduct $\times$) Eq.(8.23) ook alsvolgt lezen: het vlak dat wordt opgespannen door de vectoren $\vec{r}$ en $\vec{v}$ staat altijd loodrecht op een constante vector $\vec{J}$. Hetgeen betekent: *een massa onder invloed van een centrale kracht beweegt in een vlak.* Dit is een onderdeel van de wetten van Kepler over planeetbeweging, die hiermee dus verklaard is.

Het spreekt bijna vanzelf dat het berekenen van bewegingen onder invloed van een centrale kracht niet erg handig is in Cartesische (rechthoekige) coördinaten. Bolcoördinaten gecentreerd op de oorsprong van de centrale kracht zouden beter zijn; en, omdat wij nu weten dat de beweging zich in een vlak afspeelt, kunnen we ons nog verder beperken tot cylindercoördinaten,

$$\vec{r} = r(\cos\phi, \sin\phi) \tag{8.24}$$

Het feit dat de coördinaten (r, ϕ) een kromlijnig stelsel vormen, heeft als nadeel dat de afgeleide $d\vec{r}/dt$ allerlei geometrische extra termen bevat. Zo hebben we

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt} \tag{8.25}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{d\phi}{dt} \tag{8.26}$$

[*3] Een duidelijk en practisch boek over zulke berekeningen is *Div, Grad, Curl, and all that*, van H.M. Schey, Norton, New York 1973

In een vorm van de lineaire algebra is dit te schrijven als

$$v_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial b_j} \frac{db_j}{dt} = \sum_j J_{ij} \frac{db_j}{dt} \tag{8.27}$$

ofwel, in matrixnotatie,

$$\vec{v} = J \, \frac{d\vec{b}}{dt} \tag{8.28}$$

Hierin is J_{ij} de Jacobi-matrix of `Jacobiaan`.

Laten wij dit eens uitwerken voor het bovenstaande geval. Gebruik makend van Eq.(8.24) vinden we voor de snelheid

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \,(\cos\,\phi, \sin\,\phi) + r \,\frac{d\phi}{dt} \,(-\sin\,\phi, \cos\,\phi) \tag{8.29}$$

De eerste term in Eq.(8.29) is de **`radiële snelheid`**, de tweede term is de **`transversale snelheid`** of tangentiële snelheid, zodat

$$\vec{v}_{\rm rad} = \frac{dr}{dt} \,(\cos\,\phi, \sin\,\phi) \tag{8.30}$$

$$\vec{v}_{\rm tan} = r \,\frac{d\phi}{dt} \,(-\sin\,\phi, \cos\,\phi) \tag{8.31}$$

De versnelling vinden wij door nogmaals te differentiëren:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \,(\cos\,\phi, \sin\,\phi) + 2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}(-\sin\,\phi, \cos\,\phi) + \\ r\,\frac{d^2\phi}{dt^2} \,(-\sin\,\phi, \cos\,\phi) - r\,\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 (\cos\,\phi, \sin\,\phi) \end{aligned} \tag{8.32}$$

Nemen we hiervan het inproduct met $\vec{r}$, dan komt dat erop neer dat we de x-component van Eq.(8.32) vermenigvuldigen met cos ϕ, de y-component met sin ϕ, en optellen:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\,\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \vec{g}\cdot\vec{e} \tag{8.33}$$

Voor het uitproduct vermenigvuldigen we de x-component met sin ϕ, de y-component met cos ϕ, en trekken die twee van elkaar af:

$$2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt} + r\,\frac{d^2\phi}{dt^2} = \vec{g}\times\vec{e} \tag{8.34}$$

Bij een centrale kracht geldt Eq.(8.17) en met behulp van de afkorting

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt} \tag{8.35}$$

vinden we

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g(r) + \Omega^2 r \tag{8.36}$$

$$2\Omega\,\frac{dr}{dt} + r\,\frac{d\Omega}{dt} = 0 \tag{8.37}$$

De uitdrukking Eq.(8.37) kan nog compacter worden geschreven door hem met r te vermenigvuldigen. Dan komt er

$$2r\,\frac{dr}{dt}\,\Omega + r^2\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}\Omega\,r^2 = 0 \tag{8.38}$$

hetgeen onmiddellijk geïntegreerd kan worden en een constante oplevert. Dit is uiteraard het bovengenoemde impulsmoment:

$$m\Omega\,r^2 = J \tag{8.39}$$

9. Centrifugale versnelling

Uit de afleiding van de bewegingsvergelijking weten we dat alleen een deeltje waarop geen krachten werken, een rechte baan doorloopt met constante snelheid. Als de baan gekromd is, is er sprake van versnelling, en wij moeten weten hoe groot die is. Wij volgen de berekening van Huygens. We stellen vast dat elke kromming plaatselijk op twee manieren kan worden benaderd: door een cirkelboog en door een parabool. Het stukje cirkel wordt doorlopen met een hoeksnelheid en een kromtestraal. Door die af te beelden op de parabool vinden we welke versnelling overeenkomt met dat stukje van de baan. Zo'n versnelling noemen we 'centrifugaal'.

Versnelling betekent: verandering van de snelheid. Dat is dus meer dan alleen maar verandering van de grootte van de snelheid: ook een richtingsverandering is een versnelling, al zou de absolute waarde van de snelheid hetzelfde blijven. Om in te zien wat zo'n richtingsverandering betekent, berekenen we het `centrifugaal-effect` volgens Huygens. Een deeltje dat vanuit de oorsprong vertrekt en op de omtrek van een cirkel met straal R beweegt, volgt een pad dat gegeven wordt door de vergelijking van een cirkel die door de oorsprong $(0, 0)$ gaat:

$$x^2 + (R - y)^2 = R^2 \tag{9.1}$$

Als het deeltje met snelheid v beweegt, en we veronderstellen dat het op tijd $t = 0$ in de oorsprong zit, zien we dat het in t seconden een afstand vt langs de cirkel aflegt, en hebben we (voor zeer korte tijd t)

$$x \approx vt \tag{9.2}$$

(het teken $\approx$ voor 'ongeveer gelijk aan' herinnert ons eraan dat we kijken naar zeer korte (infinitesimale) tijd t). Als x zeer klein is zal ook y zeer klein zijn, en kunnen we in de uitgeschreven vorm van Eq.(9.1)

$$x^2 - 2yR + y^2 = 0 \tag{9.3}$$

het kwadraat y^2 verwaarlozen. Zo vinden we

$$yR = \frac{1}{2}v^2t^2 \tag{9.4}$$

Vergelijken we dit met de uitdrukkingen Eq.(3.10-12) die we eerder vonden voor beweging onder invloed van een constante versnelling g, dan concluderen we dat de versnelling die een deeltje ondervindt dat met snelheid v een bocht neemt met straal R gegeven wordt door

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{9.5} \spadesuit$$

Dit is het centrifugaal-effect, voor het eerst berekend door Huygens. Het geldt niet alleen voor cirkelbeweging, maar voor alle baanbewegingen, vanwege het feit dat we hadden gebruikt dat t zeer klein is. In de limiet voor verwaarloosbaar korte tijd kan elke baan plaatselijk gezien worden als een zeer smal sectortje van een cirkel met kromtestraal R. Wanneer we de beweging bekijken vanuit het middelpunt van de cirkel, zien we dat de hoek ϕ onder welke we het deeltje zien, in de loop van de tijd verandert, zoals de richting van je vinger verandert als je een bewegend doel aanwijst. De verandering van ϕ is de `hoeksnelheid` Ω:

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{R} \tag{9.6} \spadesuit$$

Gebruiken we deze uitdrukking, dan vinden we voor de centrifugale versnelling

$$a = \Omega^2 R \tag{9.7} \spadesuit$$

Deze vorm zullen we zeer uitgebreid toepassen bij het bestuderen van baanbewegingen.

Laten we eens een practisch geval uitrekenen. De Aarde draait in 24 uur eenmaal rond; omdat de evenaar 40.000 km omtrek heeft, is de omtrekssnelheid 463 meter per seconde. De hoeksnelheid is dus een volledige omwentelingshoek (2π) maal die snelheid gedeeld door de omtrek, ofwel 7.27×10^{-5} radialen per seconde. Huygens' centrifugaal-versnelling is dan

$$a_{\oplus} = \Omega^2 R = 0.0356 \quad \mathrm{m\,s^{-2}} \tag{9.8}$$

Dit is maar een klein beetje vergeleken met de versnelling van de zwaartekracht aan het aardoppervlak: die is 9.8 $\mathrm{m\,s^{-2}}$, dus de centrifugale versnelling aan de evenaar is maar 0.36% van de versnelling door de zwaarte. De afwijking van een perfecte bolvorm die dit veroorzaakt is dan te schatten als 3.6×10^{-3} maal de straal van de Aarde, ofwel 23 kilometer.

Oefening.

Wat is de omtrekssnelheid van de evenaar van de Zon, en van de planeten Jupiter en Saturnus? Hoe groot zijn de daardoor veroorzaakte afwijkingen van de bolvorm?

---

10. Impulsmoment

Een centrale kracht heeft een bijzondere eigenschap: de kracht is steeds naar een vast punt gericht. Deze afwijking van het algemene geval betekent dat de beweging van een deeltje in zekere zin in zijn vrijheid is beperkt. Bij zo'n beperking hoort een behouden grootheid, een 'bewegingsconstante'. In het geval van beweging onder invloed van een centrale kracht is dat het impulsmoment. Dat is het uitproduct van de impulsvector en de vector van de hoeksnelheid. In een vlak reduceert dit tot het product van de massa, de snelheid en de kromtestraal van de baan. Het behoud van impulsmoment is verantwoordelijk voor de tweede wet van Kepler, de 'perkenwet'.

Stel dat we te maken hebben met een `centrale kracht`, dat wil zeggen een kracht die naar een punt in de ruimte is gericht dat zelf niet wordt versneld. Dan kunnen we dat punt als 'vast punt' beschouwen en kijken naar de bewegingen zoals gezien vanuit dat punt. Die kan opgebouwd worden uit twee delen: een beweging dwars op de kijkrichting, en een beweging langs de gezichtslijn. Eerstgenoemde wordt niet versneld (we hebben immers een centrale kracht); alleen de tweede, radiële, beweging ondervindt een versnelling. In een klein tijdje Δt zien we vanuit het krachtcentrum het deeltje een hoek $\Delta\phi$ afleggen, ofwel een stukje $r\,\Delta\phi$ als het deeltje op afstand r langskomt. Het oppervlak van de driehoek die wordt gevormd door (1) het krachtcentrum, (2) het puntdeeltje op tijd t, en (3) het puntdeeltje op tijd $t + \Delta t$ is dan gelijk aan

$$\text{oppervlak} = \frac{1}{2} r \times r\,\Delta\phi \tag{10.1}$$

Omdat er geen dwarsversnelling is, alleen radiële versnelling, is dit oppervlak constant voor elk tijdsintervalletje Δt, en dus kunnen we schrijven

$$r^2 \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \text{constant} \tag{10.2}$$

ofwel, in de limiet voor infinitesimale tijden,

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = \Omega r^2 \equiv \frac{J}{m} \tag{10.3} \spadesuit$$

De grootheid Ω is de `hoeksnelheid` van het deeltje met massa m, gezien vanuit het krachtcentrum. De constante J is het `impulsmoment` (de term 'hoekmoment' is een anglicisme).

Beweging onder invloed van een centrale kracht verloopt dus met constant impulsmoment. Als we Eq.(10.3) terug volgen tot Eq.(10.1) dan kunnen we ook zeggen: *bij beweging onder invloed van een centrale kracht beschrijft de verbindingslijn tussen het krachtcentrum en het deeltje in gelijke tijden gelijke perken.* Dit is de 'perkenwet' van Kepler; we zien nu dat die wet veel algemener geldt dan alleen bij planeetbanen. Ook zien we dat het merkwaardige 'meetkundige' karakter van die wet te herleiden is tot het feit dat de kracht centraal gericht is. Kepler had dus in feite ontdekt dat de kracht die ons Zonnestelsel beheerst naar een centraal punt is gericht: dat is uiteraard de Zon.

Schrander gebruik van het behoud van impulsmoment maakt het oplossen van bewegingsvergelijkingen heel veel eenvoudiger. Bijna altijd kan men de essenties van een bewegingspatroon op het spoor komen door het uitbuiten van het behoud van energie en het behoud van impulsmoment. Zo kunnen we de bewegingsvergelijkingen voor beweging onder invloed van een centrale (radiële) versnelling g schrijven als

$$\frac{dv}{dt} = g(r) + \Omega^2 r = g(r) + \frac{J^2}{m^2 r^3} \qquad (10.4) \spadesuit$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2} \qquad (10.5) \spadesuit$$

Hierin is v de snelheid langs de voerstraal (de verbindingslijn tussen het bewegende deeltje en het krachtcentrum) en Ω de hoeksnelheid. We zullen veelvuldig gebruik maken van het gedrag van de `effectieve versnelling`

$$g_{\text{eff}} \equiv g(r) + \Omega^2 r = g(r) + \frac{J^2}{m^2 r^3} \qquad (10.6) \spadesuit$$

11. Massamiddelpunt

Tot dusver hebben wij het centrum van de kracht als vast gegeven genomen, maar in werkelijkheid is de toestand algemener. Omdat krachten wederzijds zijn (het gaat altijd om een wisselwerking) is er geen vast centrum. Posities in de ruimte zijn relatief. Van die vrijheid kun je gebruik maken door je coördinaten handig te kiezen. De beste keus is het stelsel waarin de som van de posities van de deeltjes, gewogen met hun massa, nul is. Dat massamiddelpunt fungeert als 'vast punt' voor de krachten.

We zagen al dat in ons Heelal ruimte en tijd *homogeen* zijn, dat wil zeggen dat een translatie $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{x}$ over een constante afstand $\vec{x}$ en de tijdtranslatie $t \to t+\tau$ geen veranderingen opleveren. Ook de Huygens-Galilei transformatie $\vec{v} \to \vec{v} + \vec{w}$ (een 'snelheidstranslatie' met constante $\vec{w}$) doet niets. Alleen versnelling lijkt absoluut te zijn (draaiende emmer). Kunnen we van die vrijheid (symmetrie) gebruik maken door een handig coördinatenstelsel (ijking) te kiezen met behulp van $\vec{x}$, τ en $\vec{w}$?

Dat kan inderdaad; het zo gevonden stelsel heet `massamiddelpuntstelsel`, vaak ten onrechte 'zwaartepuntstelsel' genoemd (met de zwaartekracht heeft het in eerste instantie niets te maken). Hier kiezen we onze coördinaten zo dat de som van alle massapunt-posities, gewogen met de massa's, nul is:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0 \qquad (11.1) \spadesuit$$

De snelheid ijken we zodanig dat de massa-gewogen snelheden (impulsen) tot nul sommeren:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = 0 \qquad (11.2) \spadesuit$$

In zekere zin kunnen we de ijking Eq.(11.2) zien als de tijdsafgeleide van Eq.(11.1) (maar als er uitwendige krachten zijn moeten we de zaak wat nader bekijken). In wat volgt zullen we vaak de benadering gebruiken dat één van de massa's zeer veel groter is dan alle andere. We zien uit Eq.(11.1) dat het massamiddelpunt samenvalt met de positie van dat supermassieve deeltje.

12. Cirkelbanen

Als voorbereiding op de algemene oplossing van de bewegingsvergelijkingen staat de cirkelbaan centraal. De reden is dat in veel sterrenkundige toepassingen de kracht die op het deeltje werkt naar een vast punt is gericht. In het geval van zo'n centrale kracht kan de hoeksnelheid van de cirkelbaan eenvoudig worden gevonden. In het planetenstelsel is dat de Derde Wet van Kepler.

We bekijken eerst het Kepler-geval. Daar is de radiële kracht gegeven door Newton's uitdrukking voor de zwaartekracht:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{12.1}$$ ♠

We veronderstellen eerst dat de massa van het deeltje m veel kleiner is dan de massa M; in dat geval kunnen we in het massamiddelpuntstelsel aannemen dat de oorsprong in M ligt, en dat M dus niet wordt versneld. De versnelling die op m werkt is dus

$$\vec{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{12.2}$$ ♠

Nu splitsen we de beweging als in Eqs.(8.36,37) in een radieel en een transversaal deel. De vergelijking voor de radiële snelheid v is dan

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2} + \Omega^2 r = g_{\text{eff}} \tag{12.3}$$ ♠

waarin $\Omega^2 r$ het Huygens centrifugaal-effect. De hoeksnelheid voldoet aan de vergelijking

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2} \tag{12.4}$$ ♠

Op een cirkelbaan met straal R is $g_{\text{eff}} = 0$, en dus vinden we voor de hoeksnelheid (ook `cirkelbaanfrequentie` genoemd)

$$\Omega^2(R) = \frac{GM}{R^3} \tag{12.5}$$ ♠

(We schrijven hier de constante waarde $\Omega(R)$, dwz. Ω ter plaatse $r = R$, om dit te onderscheiden van de functiewaarde $\Omega(r)$. Maar in het vervolg schrijven we kortaf Ω als we de hoeksnelheid bedoelen, tenzij er verwarring kan ontstaan.) Eq.(12.5) is de `derde wet van Kepler` voor cirkelbanen. Door hieruit GM op te lossen blijkt dat

$$GM = \Omega^2 R^3 = R\, v_t^2 \tag{12.6}$$

waarin v_t de transversale snelheid. Later zullen we zien dat deze vergelijking een aanknopingspunt biedt om de massa van sterrenkundige objecten te bepalen. Stoppen we dit resultaat terug in Eq.(12.3) dan vinden we, als we ook Eq.(12.4) gebruiken, dat

$$g_{\text{eff}} = -\frac{\Omega^2 R^3}{r^2} + \frac{\Omega^2 R^4}{r^3} = -\Omega^2\left(\frac{R}{r}\right)^3 (r - R) \tag{12.7}$$

Wanneer we de factoren in deze vergelijking ontleden, dan vinden we drie stukken die we binnenkort nader zullen leren kennen:

$$r - R : \text{afwijking van de cirkelbaan} \tag{12.8}$$
$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 : \text{sterkte van getijdenkracht} \tag{12.9}$$
$$\Omega : \ \text{frequentie van oscillatie rondom cirkelbaan} \tag{12.10}$$

In het geval dat het deeltje *bijna* op de cirkelbaan zit, dat wil zeggen $r \approx R$, hebben we

$$g_{\text{eff}} \approx -\Omega^2 (r - R) \equiv -\Omega^2 \, x \tag{12.11}$$

waarin $x = r - R$ de afwijking van exacte cirkelbeweging is. Wanneer we dit nu schrijven als een bewegingsvergelijking, dan ontdekken we dat een kleine afwijking van een cirkelbaan overeenkomt met een radiële oscillatie, want

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g_{\text{eff}} = -\Omega^2 \, x \tag{12.12}$$

met als oplossing

$$x = X \, \sin(\Omega t + \psi) \tag{12.13}$$

Kortom: een Keplerbaan die niet precies cirkelvormig is, kan worden beschreven als een cirkelbaan met daar bovenop een kleine radiële oscillatie. Dat is zoiets als de `epicykelbeweging` volgens Ptolemaeus. Maar het is *beter* dan dat, al was het alleen maar omdat Eq.(12.13) bewijst dat de frequentie waarmee de epicykel wordt doorlopen gelijk is aan Ω: omdat ook de cirkelbaan een hoeksnelheid Ω heeft, volgt daaruit dat de baan van het deeltje *gesloten* is. Maar we hebben hiermee nog niet bewezen dat de baan elliptisch is; dat is heel veel moeilijker!

13. Kleine afwijkingen van de cirkelbaan

Nu we gevonden hebben hoe cirkelbanen zich gedragen, kunnen we kijken of het iets algemener kan. De effectieve radiële versnelling is nul op de cirkelbaan. In de buurt van dat punt gaat de radiële versnelling van positief (dicht bij het centrum) naar negatief (buiten de cirkelbaan). Door de helling van die lijn te bekijken, krijgen we een vergelijking voor de harmonische oscillator. Het deeltje voert dus een oscillatie uit rondom de cirkelbaan. Wanneer de cirkelbaanfrequentie en de oscillatiefrequentie zich verhouden als gehele getallen, is de baan gesloten. In het Kepler-geval is die verhouding 1:1, bij de ruimtelijke harmonische oscillator is het 1:2.

Laten we de afwijkingen van de cirkelbanen eens wat nauwkeuriger bekijken. We zagen al dat de straal en de hoeksnelheid van de baan volgen uit de vergelijkingen

$$\frac{dv}{dt} = g(r) + \Omega^2 r = g(r) + \frac{J^2}{m^2 r^3} = g_{\text{eff}} = 0 \tag{13.1 ♠}$$
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2} \tag{13.2 ♠}$$

We hoeven niet te veronderstellen dat $g(r)$ de versnelling ten gevolge van een puntmassa is, zolang we maar met een centrale kracht te maken hebben. De vergelijking $g_{\text{eff}} = 0$ bepaalt de straal R van de cirkelbaan. We bezien nu wat g_{eff} doet in de buurt van R. Uit de analyse (Taylor-ontwikkeling) weten we dat in de buurt van $r = R$ de functie lineair is:

$$g_{\text{eff}}(r) = g_{\text{eff}}(R) + \frac{dg_{\text{eff}}}{dr}(r - R) + \cdots \simeq \frac{dg_{\text{eff}}}{dr}(r - R) \tag{13.3}$$

omdat $g_{\text{eff}}(R) = 0$ (het symbool $\simeq$ betekent "in de limiet gelijk aan"). In de buurt van R definiëren we de kleine afwijking $r - R$ als een nieuwe variabele x. De bijbehorende snelheid noemen we w. Dan kunnen we Eq.(13.3) direct schrijven als

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dg_{\text{eff}}}{dr}x \tag{13.4}$$

Hierbij moeten we bedenken dat de voorfactor van x berekend moet worden op het punt R, en dus een constante is. We noemen deze constante

$$\left.\frac{dg_{\text{eff}}}{dr}\right|_R \equiv -\kappa^2$$

en zo vinden we κ, de `epicykelfrequentie`. Dat dit inderdaad een frequentie is, zien we door Eq.(13.4) op te lossen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa^2 x \quad \rightarrow \quad x = X\,\sin(\kappa t + \psi)$$

waarin ψ een integratieconstante, de `fase`, en X de tweede integratieconstante, de `amplitude`.

Oefening.

Bereken door directe differentiatie in Eq.(13.5) : (1) Als $g(r)$ gegeven wordt door de Newtonvergelijking, dat wil zeggen $g \propto r^{-2}$, dan is $\kappa = \Omega$. De baan is dus gesloten, en per omloop gaat het deeltje eenmaal door het buitenste en eenmaal door het binnenste omkeerpunt. (2) Als $g(r)$ de versnelling is van een harmonische oscillator, dat wil zeggen $g \propto r$, dan is $\kappa = 2\Omega$, en is de baan dus ook gesloten (maar geen Keplerbaan – waarom niet?)

Tot dusver hebben we alleen Eq.(13.1) gebruikt, maar Eq.(13.2) is er ook nog. Roepen we die te hulp, dan vinden we allereerst dat

$$\kappa^2 = \frac{d}{dr}(g + \Omega^2 r) = \frac{dg}{dr} + \Omega^2 + r\frac{d\Omega^2}{dr} \tag{13.5}$$

Op cirkelbanen weten we door gebruikmaken van Eq.(13.2) bovendien dat

$$g(r) = -\frac{J^2}{m^2r^3} \tag{13.6}$$

en door directe differentiatie vinden we

$$\frac{dg}{dr} = \frac{3J^2}{m^2r^4} = 3\Omega^2 \tag{13.7}$$

Stoppen we dit in Eq.(13.7) en vullen we in $r = R$, dan blijkt tenslotte dat de epicykelfrequentie kan worden berekend uit

$$\kappa^2 = R\frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 = \Omega^2\left(\frac{R}{\Omega^2}\frac{d\Omega^2}{dR} + 4\right) = \Omega^2\left(2\frac{d\,\log\Omega}{d\,\log R} + 4\right) \tag{13.8}$$

Oefening.

Onder welke omstandigheden is een bijna-cirkelvormige baan gesloten? Door vergelijken met de Kepler-baan en met de harmonische oscillator zien we, dat een baan gesloten is als $m \times \kappa = n \times \Omega$, waarin m en n gehele getallen zijn. Stop deze voorwaarde in Eq.(13.10) en leid daaruit een regel af voor het gedrag van $d \log \Omega / d \log R$. Integreer deze vergelijking en vind zo $\Omega(R)$.

Tenslotte bekijken we nog of we iets kunnen zeggen over de vorm van de epicykel. In het planeetbaan-model van Ptolemaeus werd verondersteld dat de epicykels cirkelvormig zijn, omdat men een voorkeur had voor cirkels. Maar zijn het ook werkelijk cirkels? Voor de radiële oscillatie hadden we al de oplossing Eq.(13.6) en die kunnen we gebruiken in Eq.(13.2) . Per definitie is $r = R + x$, en daarmee vinden we door Taylor-ontwikkeling dat

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{2x}{R}\right) + \cdots \tag{13.9}$$

Stoppen we dit in Eq.(13.2) dan komt er

$$\Omega = \frac{J}{mR^2}\left(1 - \frac{2x}{R}\right) \tag{13.10}$$

en als we de radiële oscillatie Eq.(13.6) en de uitdrukking Eq.(13.2) voor het impulsmoment daar invullen, dan blijkt dat

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega - 2X\frac{\Omega}{R}\sin(\kappa t + \psi) \tag{13.11}$$

Dit is een bewegingsvergelijking voor de hoek ϕ van het deeltje in zijn baan. De oplossing is

$$\phi = \phi_0 + \Omega t + X\frac{2\Omega}{\kappa R}\cos(\kappa t + \psi) \tag{13.12}$$

waarin ϕ_0 een integratieconstante die verder niet interessant is en op nul wordt gesteld. In de eerste plaats zien we dat ϕ toeneemt met de tijd, door de term Ωt. Dit is de ongestoorde cirkelbeweging. Door vermenigvuldigen met R krijgen we dan de langs de cirkel afgelegde weg. De weglengte op de bijna-cirkelbaan is dus

$$\phi R \equiv y = \Omega R t + X\frac{2\Omega}{\kappa}\cos(\kappa t + \psi) \tag{13.13}$$

Door vergelijken met Eq.(13.6) zien we meteen dat de assenverhouding van de epicykel is

$$\frac{\text{radieel}}{\text{tangentieel}} = \frac{\kappa}{2\Omega} \tag{13.14}$$

De epicykel is dus geen cirkel maar een ellips! Alleen in een bijzonder geval is de ellips een cirkel.

Oefening.

(1) Wat is de assenverhouding van de epicykel in het Kepler-geval? (2) En in het geval van de harmonische oscillator? (3) Kan men iets bijzonders zeggen over de assenverhouding van de epicykels bij andere gesloten bijna-cirkelbanen?

---

14. Getijden

Binnen een cirkelbaan wil een deeltje wat sneller lopen, daarbuiten wat langzamer dan op de cirkelbaan. Een vast lichaam met eindige afmeting ondervindt daardoor een uiteendrijvende werking, de getijdenkracht. Als de eigen sterkte of de eigen zwaartekracht niet toereikend is, wordt het voorwerp door de getijden uitelkaar getrokken. Zo ontstaan de ringen van Saturnus. Later zullen we zien dat in botsende sterrenstelsels iets soortgelijks gebeurt.

Uit het bovenstaande zagen we dat verschillende banen worden doorlopen met verschillende snelheden. Wat zou er nu gebeuren als we twee deeltjes met elkaar zouden verbinden, bijvoorbeeld met een (desnoods denkbeeldig) stuk touw? Zou de lijn het houden? Combineren we Eq.(12.5) en Eq.(12.11) dan vinden we opnieuw een uitdrukking voor de effectieve versnelling op een afstandje x van een cirkelbaan met straal R:

$$g_{\text{eff}} = -\Omega^2 x = -\frac{GM}{R^3} x \tag{14.1}$$

Laten we nu een massa m bewegen op de cirkelbaan, en een andere massa m een afstandje x daarvandaan, en verbinden we die twee met een draad, dan komt daarop een kracht te staan gelijk aan

$$F = -\frac{GMm}{R^3} x \tag{14.2} \spadesuit$$

Dit noemen we de `getijdenkracht`. Merk op dat F schaalt met de inverse *derde macht* van R, dus sneller naar buiten toe afneemt dan de zwaartekracht zelf (de getijdenkracht is, wiskundig gezien, de eerste afgeleide van de zwaartekracht). Of de draad het houdt, hangt van het materiaal af, maar we zien wel dat de kracht lineair toeneemt met x, dus *grotere voorwerpen ondervinden meer getijdenwerking dan kleinere.*

Eerder zagen we al dat de kracht van het materiaal over het algemeen te verwaarlozen is vergeleken met de zwaartekracht (daarom is de Aarde een bol). Laten we dus eens kijken of de eigen zwaartekracht van een voorwerp weerstand kan bieden aan de getijdenkracht die ontstaat als het voorwerp in een baan om een massa M draait. De kracht die een bolvormige massa m met straal x op zichzelf uitoefent is uiteraard

$$F_m = -\frac{Gm^2}{x^2} \tag{14.3}$$

Stellen we deze nu gelijk aan de getijdenkracht, dan volgt meteen dat

$$\frac{m}{x^2} = x\frac{M}{R^3} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{x^3} = \frac{M}{R^3} \tag{14.4}$$

Bij elke combinatie van massa's m en M en afmeting x hoort dus een baanstraal R waarbinnen de getijdenkracht het wint:

$$R = x\left(\frac{M}{m}\right)^{1/3} \tag{14.5} \spadesuit$$

Dit noemen we de `Roche-limiet`.

Deze Roche-limiet kunnen we ook iets inzichtelijker formuleren. De uitdrukking m/x^3 is, op een geometrische factor na, een massa gedeeld door een volume. Dus staat links van het gelijkteken de massadichtheid van de bolvormige massa. Rechts staat ook een soort 'effectieve dichtheid': het is de *gemiddelde* massadichtheid die je zou krijgen wanneer je de massa M zou uitsmeren over een bol met een straal gelijk aan de cirkelbaanstraal R. Dus vinden we: *een voorwerp wordt door getijdenkrachten uiteengedreven als de massadichtheid ervan* kleiner *is dan de dichtheid die je zou krijgen wanneer je de centrale massa zou verspreiden over een bol zo groot als de baan.*

Oefening.

Wat is de Roche-limiet voor Jupiter, Saturnus en de Zon? Staat Mercurius op veilige afstand buiten de Roche-limiet van de Zon? Liggen de ringen van Saturnus binnen of buiten de Roche limiet?

Getijdenkracht is niet alleen verantwoordelijk voor de getijden in onze oceanen, maar ook voor het feit dat de Maan steeds dezelfde kant naar de Aarde toekeert. Soortgelijke `spin-baanresonanties` zijn door het hele Zonnestelsel te vinden. Io, een satelliet van Jupiter, wordt door getijdenkrachten zo sterk gekneed dat de satelliet geheel vloeibaar is (op een flinterdun buitenste korstje na). Io is dan ook vulkanisch bijzonder actief: het is meer een gigantische druppel vloeibare lava dan een harde bol.

Stel tenslotte dat we toch willen weten hoe de getijdenkracht werkt als de massa m niet door de zwaartekracht, maar door materiaalsterkte bijeen wordt gehouden (bijvoorbeeld als we een zeer groot ruimtestation willen bouwen). Dan moeten we de kracht uit Eq.(14.2) stellen tegenover de drukkracht op een doorsnede van m. Als m bolvormig is, dan is de doorsnede πx^2, en dus

$$\frac{GMm}{R^3}x = \pi P x^2 \tag{14.6}$$

Als nu ρ de massadichtheid van m is, en ρ_R de effectieve dichtheid van M binnen de baanstraal R, dan hebben we

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho x^3 \quad ; \qquad M = \frac{4}{3}\pi\rho_R R^3 \tag{14.7}$$

Stoppen we dit in Eq.(14.6) dan blijkt na enig schuiven dat

$$x^2 = \frac{9}{16\pi}\frac{P}{\rho}\frac{1}{G\rho_R} \tag{14.8}$$

Opnieuw krijgen we een formule van het type Eq.(5.9) , Eq.(6.19) en Eq.(6.20) ! Zo ziet men hoe het steeds weer dezelfde combinaties van fysische grootheden zijn die een bepaald probleem karakteriseren. Een vergelijking is niet iets om gedachteloos in je zakcomputer te proppen, maar iets om over na te denken en naar je hand te zetten. Een vergelijking is echt een *vergelijking*, een wiskundige en symbolische afbeelding van wat de Natuur doet.

Oefening.

(1) Hoe groot kan een ruimtestation zijn voordat het problemen krijgt met getijden? Neem voor M en R de massa en de straal van de Aarde, en schat P en ρ als in de berekeningen over berghoogte. (2) Hoe groot kunnen de brokstukken in de ringen van Saturnus zijn? Neem aan dat die stukken bestaan uit sneeuw met een dichtheid van ongeveer een tiende van de dichtheid van ijs op Aarde.

---

15. Vergelijkbare massa's

Het is niet zo dat alleen de Zon de planeten aantrekt; Zon en planeten trekken elkaar aan. Ook al bevat de Zon dan duizend maal meer massa dan alle planeten bijelkaar, toch is dat niet genoeg om de Zon helemaal te doen stilstaan. Wij kunnen uitrekenen wat er gebeurt als twee massa's elkaar aantrekken, door de bewegingsvergelijking zo te formuleren dat het massamiddelpunt van de deeltjes in de oorsprong van het coördinatenstelsel staat.

Tot dusver hebben we het ons wat gemakkelijk gemaakt door te veronderstellen dat $M >> m$. Als dat niet het geval is, moeten we de banen uitrekenen in het algemene massamiddelpuntstelsel. Laat gegeven zijn dat twee massa's M_1 en M_2 zich in een cirkelbaan om elkaar heen bewegen. Laat r_1 en r_2 hun respectieve afstanden zijn tot het massamiddelpunt. De kracht die zij op elkaar uitoefenen is dan

$$F = -\frac{GM_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} \tag{15.1 ♠}$$

Kies nu een van de twee massa's als de 'bewegende' massa. Het doet er niet toe welke; laten we zeggen M_2. Beide massa's draaien met een hoeksnelheid Ω rondom hun gezamenlijk massamiddelpunt. De effectieve versnelling werkend op M_2 is dan

$$g_{\text{eff}} = -\frac{GM_1}{(r_1 + r_2)^2} + \Omega^2 r_2 \tag{15.2 ♠}$$

Hieruit is direct de hoeksnelheid op te lossen, en vinden we de 'derde wet van Kepler' in het algemene geval:

$$\Omega^2 = \frac{GM_1}{r_2(r_1 + r_2)^2} \tag{15.3}$$

In het massamiddelpuntstelsel geldt wegens Eq.(11.1) dat

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \tag{15.4 ♠}$$

en dus

$$r_1 + r_2 = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right) r_1 = \left(\frac{M_2}{M_1} + 1\right) r_2 \tag{15.5}$$

Dit gebruiken we in Eq.(15.3) en vinden

$$\Omega^2 = G\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\frac{1}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \tag{15.6}$$

Merk op: *deze uitdrukking is symmetrisch voor de verwisseling van 1 en 2*, dus is geldig voor beide massa's (zo niet, dan zouden we een ernstig probleem hebben; zulke trucs ter verificatie zijn *zeer* nuttig). Soms wordt dit geschreven door de effectieve of `gereduceerde massa` $\mathcal{M}$ te definiëren als

$$\mathcal{M} \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \tag{15.7}$$

waardoor Eq.(15.6) nog meer gaat lijken op de eerder gevonden vorm van de Derde Wet van Kepler:

$$\Omega^2 = \frac{G\mathcal{M}}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \tag{15.8}$$

Oefening.

(1) Eq.(15.6) kan ook worden geschreven als

$$\Omega^2 = \frac{GM_1^3}{(M_1 + M_2)^2}\frac{1}{r_2^3} = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2}\frac{1}{r_1^3} \tag{15.9}$$

(2) Wat is Ω^2 in de limiet dat M_1 zeer veel groter is dan M_2? (3) Wat is r_1 voor de Zon, als we voor M_2 en r_2 massa en baanstraal van Jupiter nemen? (4) Wat is r_1 voor de Aarde, als we voor M_2 en r_2 massa en baanstraal van de Maan nemen?

16. De Kepler-ellips

Het klapstuk van de berekening van de beweging van twee deeltjes die elkaar door hun zwaartekracht aantrekken is de oplossing van de baanvergelijking. Hiermee is de theoretische verklaring van de wetten van Kepler compleet.

In hoofdstukken 8 en 12 zagen we hoe de bewegingsvergelijking kan worden omgevormd als wij met een centrale versnelling $g(r)$ te maken hebben. Het resultaat is, dat we een bewegingsvergelijking hebben voor de radiële snelheid v, en een behoudswet voor de hoeksnelheid Ω:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = g(r) + \Omega^2 r \tag{16.1}$$

$$\Omega r^2 = \text{constant} = v_{\text{orb}} r = \mathcal{J} \tag{16.2}$$

waarin $\mathcal{J} \equiv J/m$ het impulsmoment per massa-eenheid en v_{orb} de transversale snelheid, dat is de snelheidscomponent loodrecht op de voerstraal. In het geval van cirkelbanen is v_{orb} gelijk aan de baansnelheid. Zoals altijd heeft de bewegingsvergelijking een energie-integraal:

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dr} = g(r) + \Omega^2 r \tag{16.3}$$

In het Kepler-geval wordt dit, bij toepassing van Eq.(16.2) ,

$$\frac{1}{2}v^2 = \mathcal{E} + \int \left(-\frac{GM}{r^2} + \Omega^2 r \right) dr = \mathcal{E} + \frac{GM}{r} - \frac{\mathcal{J}^2}{2r^2} \tag{16.4}$$

Hierin is $\mathcal{E} \equiv E/m$ de energie per massa-eenheid. Zo krijgen we dan

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2GM}{r} - \frac{\mathcal{J}^2}{r^2}} \tag{16.5}$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mathcal{J}}{r^2} \tag{16.6}$$

Het is mogelijk om Eq.(16.5) te integreren, maar we zijn minder geïnteresseerd in de exacte uitdrukking voor $r(t)$ dan in de baanvorm $r(\phi)$. Daarom delen wij Eq.(16.6) door Eq.(16.5) en krijgen

$$\frac{d\phi/dt}{dr/dt} = \frac{d\phi}{dr} = \frac{\Omega}{v} = \frac{\mathcal{J}}{r^2}\left(2\mathcal{E} + \frac{2GM}{r} - \frac{\mathcal{J}^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{16.7}$$

Dit leidt tot de volgende vergelijking voor de baan, waarin we nog wel een pittige integraalvorm moeten oplossen:

$$\phi = \mathcal{J} \int \frac{1}{r^2}\left(2\mathcal{E} + \frac{2GM}{r} - \frac{\mathcal{J}^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr \tag{16.8}$$

Evenals in het geval van de structuurformule voor sterren (de Emden-vergelijking) kunnen wij dit vereenvoudigen door over te gaan op dimensieloze variabelen. Dat wil zeggen, dat we de variabelen uitdrukken met behulp van de in het probleem voorkomende karakteristieke fysische grootheden zoals M, $\mathcal{J}$ en $\mathcal{E}$. We definiëren de lengte-eenheid

$$p \equiv \frac{\mathcal{J}^2}{GM} = \frac{J^2}{GMm^2} \tag{16.9}$$

en drukken r uit in deze eenheid, door te schrijven

$$q \equiv \frac{r}{p} \; ; \qquad r = pq = \frac{\mathcal{J}^2}{GM}\, q \tag{16.10}$$

De vergelijking voor de baan wordt nu

$$\phi = \int \left(K + \frac{2}{q} - \frac{1}{q^2} \right)^{-1/2} \frac{1}{q^2}\, dq \tag{16.11}$$

waarin K de constante

$$K \equiv \frac{2\mathcal{E}\mathcal{J}^2}{G^2 M^2} \tag{16.12}$$

Oefening.

Laat zien, met behulp van de dimensies van de diverse grootheden, dat Eq.(16.9) de dimensie van een lengte heeft. Bereken de waarde van p in het geval van de Aarde. Merk op dat je daarvoor eerst $\mathcal{J}$ moet berekenen met behulp van Eq.(16.2) . Toon ook aan dat K dimensieloos is.

De lastige vorm $1/q^2$ pakken we aan door te bedenken dat

$$\frac{1}{q^2}\, dq = -d\frac{1}{q} \equiv -dh \tag{16.13}$$

en met behulp van deze h komt er

$$\begin{aligned} -\phi &= \int \left(K + 2h - h^2 \right)^{-1/2} dh \\ &= \int \left((K+1) - (1-h)^2 \right)^{-1/2} dh \end{aligned} \tag{16.14}$$

Tenslotte voeren we nog eenmaal een andere constante in, en schrijven

$$e^2 \equiv K + 1 = 1 + \frac{2\mathcal{E}\mathcal{J}^2}{G^2 M^2} \tag{16.15}$$

zodat tenslotte

$$\phi = -\int \left(e^2 - (1-h)^2 \right)^{-1/2} dh = \int \frac{1}{\sqrt{e^2 - (1-h)^2}} d(1-h) \tag{16.16}$$

Dit is een bekende vorm, want

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x \tag{16.17}$$

en daaruit zien we meteen dat Eq.(16.16) wordt opgelost door

$$1 - h = e \cos\phi \tag{16.18}$$

De baanvergelijking is dus de vergelijking van een ellips (in poolcoördinaten):

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos\phi \tag{16.19}$$

$$p = \frac{\mathcal{J}^2}{GM} \tag{16.20}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}\mathcal{J}^2}{G^2 M^2}} \tag{16.21}$$

De grootheid e is de `excentriciteit` van de ellips. *Let op:* bij gebonden banen, dus banen die een binnenste en een buitenste omkeerpunt hebben, zagen wij al eerder (in Hst.13) dat $\mathcal{E}$ *negatief* is! De excentriciteit voor gebonden banen ligt dus tussen $e = 0$ (cirkelbanen) en $e = 1$ (parabolen). Enig rekenwerk laat zien dat de `halve lange as` a en de halve korte as b gegeven worden door

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \tag{16.22}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{16.23}$$

17. Sterbouw

Bij de behandeling van de Emden-vergelijking voor de structuur van zelfgraviterende bollen hadden we nog geen rekening gehouden met het feit dat een zeer zware bol zo heet is dat hij straling uitzendt. Straling is energieverlies, dus zonder compenserende bron van energie kan zo'n bol niet stabiel zijn.

Nu keren we weer terug naar de hydrostatische structuur van bollen die door hun eigen zwaartekracht bijeen gehouden worden. We gaan daar een uitbreiding van maken die noodzakelijk is omdat blijkt dat de temperatuur van zeer grote massa's zo hoog is, dat een nieuw fysisch verschijnsel in aanmerking moet worden genomen: straling. Tot dusver hadden we alleen gekeken naar het hydrostatisch evenwicht. Uit het twee-schillenmodel maakten we de schatting in Eq.(6.8) voor de inwendige temperatuur:

$$T = \frac{G\mu}{3k}\frac{M}{R} \tag{17.1}$$

Een meer gedetailleerde beschrijving van het hydrostatisch evenwicht leidde tot Eq.(7.8) en Eq.(7.11) (vergelijking van Emden),

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2 \tag{17.2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{d\rho^\gamma}{dr}\right) = -\frac{4\pi G}{\kappa}\rho r^2 \tag{17.3}$$

Bovendien zagen we in Eq.(7.17) dat de afmeting R, de gemiddelde dichtheid ρ en de druk P in een zelfgraviterende bol samenhangen volgens

$$4\pi G\frac{R^2\rho^2}{P} \approx 1 \tag{17.4}$$

Gebruiken we nu de ideale gaswet

$$P = \frac{k}{\mu}\rho T \tag{17.5 ♠}$$

en de uitdrukking voor de massa

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{17.6}$$

dan vinden we opnieuw een uitdrukking van de vorm Eq.(6.8) die we in het twee-schillenmodel al tegenkwamen:

$$T = \frac{3G\mu}{k}\frac{M}{R} = 2.43\times 10^{-14}\ \frac{M}{R} \quad \mathrm{K} \tag{17.7 ♠}$$

Dit is niet exact hetzelfde als Eq.(6.8) omdat het eigenlijk om schattingen gaat. Om de echte centrale temperatuur van een zelfgraviterende bol te vinden zou je Eq.(17.3) moeten oplossen, maar dat is nu nog te hoog gegrepen. We zullen ons dus beperken tot schattingen van het type Eq.(17.1,7) maar dat is genoeg om in te zien dat T in grote massaconcentraties enorm kan oplopen: vullen we in Eq.(17.7) de waarden voor de Zon in, dan vinden we een T van bijna 70 miljoen kelvin (let wel: exacte oplossing van de structuurvergelijking voor een ster geeft een temperatuur die een factor 5 lager is).

Deze enorme temperaturen hebben tot gevolg dat twee fysische effecten een rol gaan spelen die tot dusver niet aan de orde zijn gekomen. In de eerste plaats is daar de *straling.* Hoe heter een lichaam is, hoe meer straling het uitzendt, volgens de regel van Stefan & Boltzmann. Dat betekent dat een zelfgraviterend lichaam eigenlijk nooit in evenwicht kan zijn, want straling betekent energieverlies, energieverlies betekent ondermijning van de gasdruk, en een tekort aan gasdruk betekent tenslotte dat de zwaartekracht onvoldoende wordt tegengewerkt en dat de bol dus moet samentrekken. Maar hier komt het tweede effect te hulp: `kernfusie`. In het binnenste van de ster smelten atoomkernen samen. De massa m_2 van het smeltprodukt is kleiner dan de gezamenlijke massa m_1 van de losse deeltjes, en het verschil $\Delta m \equiv m_1 - m_2$ komt vrij in de vorm van de `bindingsenergie`

$$\Delta E = c^2 \Delta m \tag{17.8} \spadesuit$$

De ster is (voorlopig!) in evenwicht als de hierbij vrijkomende energie juist genoeg is om het door straling verloren gegane te compenseren.

Oefening.

Stel dat de hele massa van de Zon zou worden omgezet in energie. Hoeveel energie komt er dan vrij? Hoe lang zou de Zon maximaal kunnen schijnen, met de tegenwoordige lichtkracht van 3.85×10^{26} watt?

18. De Gamow factor

Uit het verband tussen massa, straal en temperatuur van bollen zien wij dat in het binnenste van een voorwerp als de Zon de temperatuur van de orde van 10 miljoen kelvin is. Onder die omstandigheden zijn de electronen geheel los van de atoomkernen. Die kernen botsen tegen elkaar en zo kan er kernfusie optreden, wardoor de ster kan blijven stralen. Om te berekenen hoe dat gaat moeten we weten hoe twee protonen zo dicht bij elkaar kunnen komen dat de 'sterke kernkracht' ze bijeen bindt. Dit is een toepassing van de quantummechanica. We volgen de methode van Gamow om te schatting bij welke energie kernreacties in een ster het best verlopen.

Het nucleaire kookboek dat bepaalt hoe in een ster de verschillende reacties verlopen, is uitermate ingewikkeld en niet geschikt voor een korte presentatie. Maar het is wel mogelijk om de essentie van het fusie-gedrag te doorzien, met behulp van een combinatie van twee stukken fysica: de quantummechanica, die bepaalt hoe deeltjes met een gegeven energie wisselwerken, en de thermodynamica, die de energieverdeling van deeltjes beschrijft. Het resultaat van beide is een uitdrukking voor de waarschijnlijkheid dat bepaalde reacties optreden.

Eerst kijken we naar de verdeling van de energieën E van een verzameling deeltjes met massa m. Bij een botsing tussen twee deeltjes is het gemiddeld even waarschijnlijk dat een deeltje aan energie wint, als dat het verliest; anders zou er geen evenwicht zijn. Laat de kans op een energieverlies ΔE gegeven zijn door

$$P = \beta \, \Delta E \tag{18.1}$$

De kans dat een deeltje bij de botsing energie wint is dan $1 - P$. De waarschijnlijkheid dat een deeltje na N botsingen steeds energie heeft gewonnen is, wegens de vermenigvuldigingsregel voor samengestelde kansen, gelijk aan

$$w = (1 - P)^N = (1 - \beta \, \Delta E)^N \tag{18.2}$$

Na N botsingen is van dat deeltje de energie opgelopen tot

$$E = N \, \Delta E \tag{18.3}$$

en zodoende is

$$w = \left(1 - \beta \frac{E}{N}\right)^N \tag{18.4}$$

Wie snel is met analyse, weet uit het hoofd dat dit, in de limiet voor zeer veel stapjes ($N \to \infty$), geschreven kan worden als

$$w = \mathrm{e}^{-\beta E} \tag{18.5}$$

De kans dat we in een thermisch gas een deeltje met energie E aantreffen neemt dus exponentieel af met die energie. De bijbehorende e-waarde is de `thermische energie`

$$\frac{1}{\beta} \equiv kT \tag{18.6}$$

De waarschijnlijkheid w moet nog worden genormaliseerd, zodanig dat de integraal over de hele verdeling gelijk is aan 1, maar dat zullen we hier niet doen. Wij zien wel dat de `verdelingsfunctie` f van de energie in een thermisch gas wordt gegeven door de `Boltzmann-verdeling`

$$f \propto \mathrm{e}^{-E/kT} \tag{18.7 ♠}$$

dat wil zeggen: de kans dat een deeltje in een gas met temperatuur T een energie E heeft, neemt exponentieel af met toenemende E.

Nu vragen wij ons af, wat de kans is dat een deeltje met zekere energie E een ander deeltje 'raakt'. Wat wij daar hier mee bedoelen is dit: stel dat het deeltje afgestoten wordt door een centrale potentiaal $V(r)$. Wat is dan de kans dat het deeltje het punt $r = 0$ bereikt? Klassiek is het antwoord duidelijk: die kans is nul, want de minimale waarde van r is de oplossing van de vergelijking voor het omkeerpunt,

$$V(r) - E = 0 \tag{18.8}$$

Maar in de quantummechanica ligt dat subtieler. De gevolgen van het quantumgedrag kunnen we schatten uit de tijdsonafhankelijke `Schrödingervergelijking`

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\psi \tag{18.9 ♠}$$

In het geval dat $V - E$ constant is, kennen we de oplossing, namelijk de vlakke golf

$$\psi = \mathrm{e}^{ir\sqrt{2m(V-E)/\hbar^2}} \tag{18.10}$$

In het algemeen is V een functie van r, maar als dat een redelijk brave functie is, kunnen we hopen dat de vorm

$$\psi = \mathrm{e}^{iu(r)} \tag{18.11}$$

een goede benadering geeft. Substitutie van deze ψ in Eq.(18.9) levert

$$i\frac{d^2u}{dr^2} - \left(\frac{du}{dr}\right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E) \tag{18.12}$$

Nu weten we al, dat voor een deeltje bij constante V geldt $u \propto r$ (zie Eq.(18.10)), zodat de tweede afgeleide nul is. Wij maken nu de *veronderstelling* dat die tweede afgeleide verwaarloosbaar is (dat komt neer op 'braaf' gedrag van V). Dit noemt men de `WKBJ-benadering`. In de klassiek-verboden zone, $E < V$, vinden wij dan

$$u = i\int_a^0 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E)}\, dr \tag{18.13}$$

Nu kunnen we uit Eq.(18.11) en uit het product $\psi^*\psi$ de kans uitrekenen dat het deeltje inderdaad het punt $r = 0$ bereikt.

In het vervolg zijn wij aleen geïnteresseerd in de manier waarop die kans afhangt van de energie E van het deeltje. Numerieke factoren zijn van later zorg. Het gaat dus om de integraal

$$I = \int_a^0 \sqrt{V(r) - E}\, dr \tag{18.14}$$

Neem nu aan dat V een afstotende Coulomb-potentiaal is:

$$V = \frac{C}{r} \tag{18.15}$$

Het klassieke omkeerpunt in Eq.(18.8) is dan

$$a = \frac{C}{E} \tag{18.16}$$

Gebruiken we nu de variabele

$$y \equiv \frac{r}{a} \tag{18.17}$$

dan wordt de integraal in Eq.(18.14)

$$I = a\sqrt{E} \int_1^0 \sqrt{\frac{1}{y} - 1}\, dy = \frac{Q}{\sqrt{E}} \tag{18.18}$$

(merk op dat wij Eq.(18.16) hebben gebruikt) waarin Q een constante die onder andere afhangt van de massa van het deeltje, de sterkte van de afstoting, en wiskundige constanten. De waarschijnlijkheid dat een deeltje het punt $r = 0$ bereikt, is dan

$$\psi^* \psi \propto \mathrm{e}^{-2Q/\sqrt{E}} \tag{18.19}$$ ♠

Nu zijn we tenslotte in staat om te zien hoe groot de kans is dat een deeltje in een thermisch gas de Coulomb-barrière doordringt. Enerzijds is er Eq.(18.19) die zegt dat die kans exponentieel *toeneemt* naarmate E groter is. Immers, bij hogere energie hoeft het deeltje maar een kleine weg af te leggen op klassiek verboden terrein. Anderzijds zegt Eq.(18.7) dat die kans exponentieel *afneemt* naarmate E groter is. Immers, de kans dat je in een thermisch gas bij N botsingen steeds maar energie wint, en dus een energie $N\,\Delta E$ bereikt, wordt steeds kleiner naarmate N toeneemt. Het ligt voor de hand te kijken of die twee tegengestelde tendensen ergens een gulden middenweg vinden. Daartoe is het nodig dat de exponent in de gezamenlijke waarschijnlijkheid

$$w \propto \mathrm{e}^{-E/kT - 2Q/\sqrt{E}} \tag{18.20}$$

(ook wel de `Gamow-vergelijking` genoemd) een minimum bereikt. Differentiatie leert dat het minimum bestaat, en bereikt wordt bij

$$E = (QkT)^{2/3} \tag{18.21}$$

Door ook de tweede afgeleide uit te rekenen kan men eenvoudig nagaan dat dit maximum zeer scherp is. Daarom noemt men de waarde in Eq.(18.21) wel de `Gamow-piek` voor thermische tunnel-reacties. Een voorbeeld (Arnett, p.68) is de reactie waarbij een ^{12}C-kern een proton vangt en onder uitzending van een foton overgaat in een ^{13}N-kern:

$$E = 3.93\, T_6^{3/2} \quad \text{keV} \tag{18.22}$$

waarin T_6 de temperatuur in miljoenen kelvin.

Met behulp van formules van het type Eq.(18.20,22) kunnen wij het hele thermonucleaire kookboek samenstellen. In de praktijk komen daar experimentele gegevens bij uit laboratoriumproeven. Bovendien zijn zeer veel belangrijke reacties niet te schrijven als Eq.(18.20) omdat de atoomkern ook *resonanties* kan vertonen, zodat het energiespectrum van de reacties niet langer een continu spectrum is maar ook discrete toestanden heeft, overeenkomend met spectraallijnen in optische spectra. Het berekenen van deze toestanden en hun overgangswaarschijnlijkheden is buitengewoon ingewikkeld.

19. De regel van Stefan & Boltzmann

De straling die in het binnenste van een ster wordt opgewekt ontsnapt uiteindelijk door het oppervlak. De temperatuur daar is wel veel lager dan in het centrum van de ster, maar toch nog vele duizenden kelvin. Om de energie die de ster verliest (de lichtkracht) te koppelen aan de temperatuur gebruiken wij de regel van Stefan-Boltzmann.

Een lichaam met temperatuur T in thermisch evenwicht ("zwarte straler") zendt per seconde een hoeveelheid energie uit gegeven door

$$\text{lichtkracht} = \text{SB constante} \times \text{oppervlak} \times T^4 \tag{19.1}$$

De Stefan-Boltzmann constante wordt meestal als σ geschreven. Als de straler een bol met straal R is, vinden we dat

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4 \tag{19.2}$$ ♠

Combineren we deze regel met de vergelijking Eq.(6.8) voor de inwendige temperatuur, dan blijkt dat

$$L = 4\pi\sigma R^2 \left(\frac{G\mu}{3k}\right)^4 \frac{M^4}{R^4} = 4\pi\sigma \left(\frac{G\mu}{3k}\right)^4 \frac{M^4}{R^2} = 3.76 \times 10^{-65}\ \frac{M^4}{R^2} \quad \text{W} \tag{19.3}$$

Dus: hoe groter de massa, hoe groter de lichtkracht, en wel met een zeer steile macht van M. Hoe kleiner (bij gegeven massa) de straal is, hoe groter de lichtkracht. Dit laatste lijkt nogal tegen de intuïtie in te gaan! Ga na hoe deze stand van zaken is ontstaan, door bovenstaande redenering naar de oorsprong te volgen (achteruit lezen, dus).

Oefening.

Bereken Eq.(19.2) voor de Zon, die een oppervlaktetemperatuur heeft van ongeveer 5800 K, en ga na dat dit klopt met de gemeten lichtkracht.

We kunnen de regel van Stefan-Boltzmann nog op een andere manier gebruiken. De hoeveelheid energie per seconde L, die door een bol rondom de Zon stroomt, is constant. Dat wil zeggen dat de regel Eq.(19.2) ook geldt voor andere combinaties van R en T. Als de Zon, inplaats van straal $R_\odot$ en temperatuur $T_\odot$, een straal $R_\oplus$ zou hebben gelijk aan de baanstraal van de Aarde, dan zou $T_\oplus$ de bijbehorende temperatuur zijn. Omdat de Aarde verlicht wordt door de Zon, zou dus de zo gevonden $T_\oplus$ gelijk moeten zijn aan de temperatuur die de Aarde krijgt ten gevolge van de verhitting door de Zon. In formule,

$$R_\odot^2 T_\odot^4 = R_\oplus^2 T_\oplus^4 \tag{19.4}$$

Dit kan eenvoudig worden omgewerkt tot

$$T_\oplus = T_\odot \sqrt{\frac{R_\odot}{R_\oplus}} \tag{19.5}$$

Op deze manier kunnen we uitrekenen hoe warm (of koud) een planeet wordt door de zonnestraling: de temperatuur neemt af omgekeerd evenredig met de wortel van de afstand tot de Zon.

Oefening.

(1) Bereken de waarde van T voor de Aarde, voor Jupiter en voor Venus. Ga in de boeken na wat de gemeten waarden zijn. Hoe komt het dat de berekende waarden (vooral voor Venus) verschillen van de metingen? (2) Laten we zeggen dat de "leefbare zone" rondom een ster aan de binnenzijde wordt begrensd door de afstand waar water verdampt (ruwweg 400 K) en aan de buitenzijde door de afstand waar water bevriest (zeg 300 K). Bereken dan de leefbare zone rondom een ster met een straal gelijk aan die van onze Zon, maar met een temperatuur die tweemaal kleiner of tienmaal groter is dan die van de Zon.

---

20. Massa-lichtkracht relatie

In het geval van het eenvoudige twee-schillenmodel zagen wij voor het eerst dat er een verband bestaat tusen de karakteristieke grootheden van een zelfgraviterende bol, zoals de massa, de straal en de temperatuur. Omdat de lichtkracht een functie is van de oppervlakte en de temperatuur, is er een verband tussen de massa en de lichtkracht van een ster.

Door gebruik te maken van Eq.(6.8) als schatting van de temperatuur van een ster,

$$T = \frac{G\mu}{3k}\frac{M}{R} \tag{20.1} ♠$$

kunnen we de Stefan-Boltzmann regel Eq.(19.2) omwerken tot een verband tussen de lichtkracht en de massa van een ster. We zullen de diverse constanten niet meenemen, maar alleen kijken naar de verhoudingen. Zo kunnen we schrijven

$$L \propto R^2 T^4 \tag{20.2}$$

$$T \propto \frac{M}{R} \tag{20.3}$$

$$M \propto \rho R^3 \tag{20.4}$$

Na enig schuiven vinden we hieruit dat

$$L \propto \rho^{2/3} M^{10/3} \tag{20.5}$$

Blijkbaar hangt de lichtkracht van een ster zeer steil af van de massa. Dit vermoedden we al uit eerdere schattingen. Het verklaart waarom zelfs massieve planeten, zoals Jupiter, nauwelijks uit zichzelf stralen. Wanneer we de gemeten waarden voor de Zon invullen in Eq.(20.5) vinden we een vergelijking die we (met enig voorbehoud) ook voor andere sterren kunnen gebruiken:

$$L = 3.10 \times 10^{-77} \rho^{2/3} M^{10/3} \quad \mathrm{W} \tag{20.6}$$

Nemen we bovendien nog aan dat de massadichtheid van sterren wel zowat gelijk zal zijn aan die van de Zon, $\rho_\odot = 125.7\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, dan vinden we

$$L \approx 8 \times 10^{-76} M^{10/3} \quad \mathrm{W} \tag{20.7}$$

Oefening.

Bereken uit Eq.(20.7) wat de lichtkracht is van een ster van 10 of 100 zonsmassa's.

21. Vrije weglengte

In de astrofysica komt het vaak voor dat we willen uitrekenen hoe een deeltje zich gedraagt dat zeer veel botsingen ondergaat. Eerst moeten wij daarvoor uitrekenen wat de kans is dat het deeltje met een ander botst. De meest gebruikte maat hiervoor is de gemiddelde vrije weglengte. Hiervoor leiden we een eenvoudige formule af, die zeer veel toepassingen heeft. Voorlopig passen wij de formule toe op fotonen in een ster. Later zullen wij ook zien wat de vrije weglengte is voor sterren in sterrenstelsels en voor sterrenstelsels in het Heelal.

Het is alles goed en wel om energie te maken in het binnenste van een ster, maar de straling moet zich ook nog een weg naar buiten banen. Bij het berekenen van de structuur van een ster betekent dat een forse extra complicatie: niet alleen moeten we het stralingsverlies meeberekenen (met de Stefan-Boltzmann regel), en moeten we de energie-opbrengst van kernfusie weten (uit een 'kookboek' voor kernreacties), we moeten ook nog rekening houden met het feit dat straling er niet zomaar uit kan (behalve de neutrino's die bij kernfusie vrijkomen, maar daar zien we hier even van af).

Om te weten hoe erg dit probleem is, gaan we na hoe ver een lichtdeeltje (foton) kan vliegen voordat het in botsing komt met een electrisch geladen deeltje (zoals een electron) in de ster. We bekijken daartoe een stukje Δx van het pad van een foton. In een cylindertje met lengte Δx en dwarsdoorsnede (oppervlak) S, waarin zich n deeltjes per kubieke meter bevinden, vindt het foton een aantal deeltjes op zijn weg gelijk aan

$$\Delta N = nS\,\Delta x \tag{21.1}$$

omdat het aantal simpelweg gelijk is aan de dichtheid maal het volume. Het vermogen van een deeltje om een foton te onderscheppen wordt uitgedrukt met Σ, de `werkzame doorsnede`, dat aangeeft hoeveel vierkante meter trefvlak het deeltje aan het foton presenteert. De kans op een treffer bij het doorlopen van Δx is dus

$$\frac{\text{totaal trefvlak}}{\text{doorsnede}} = \frac{\text{trefvlak}}{\text{doorsnede}} \times \Delta N \equiv \Delta p = \frac{\Sigma}{S}\,\Delta N = n\Sigma\,\Delta x \tag{21.2}$$

Hoe ver komt het foton door k maal een stukje Δx spitsroeden te lopen? Als het foton niet gevangen wordt, legt het een weg

$$\text{padlengte} = x = k\,\Delta x \tag{21.3}$$

af, maar zover zal het niet altijd komen. Het is het eenvoudigst om eerst te kijken wat de kans is dat het foton *niet* wordt onderschept. We hebben

$$\text{kans op vrije doortocht} = 1 - \text{kans op botsing} = 1 - n\Sigma\,\Delta x \tag{21.4}$$

Doen we dit k maal, dan is de kans p op vrije doortocht gelijk aan het product van alle afzonderlijke kansen, en dus

$$p = (1 - n\Sigma\,\Delta x)^k = \left(1 - \frac{1}{k} n\Sigma x\right)^k \tag{21.5}$$

In de limiet voor zeer veel stapjes ($k \to \infty$) wordt dit

$$p = \mathrm{e}^{-n\Sigma x} \tag{21.6} ♠$$

De kans dat een foton vrijelijk kan passeren neemt dus exponentieel af met de afgelegde weg. De bijbehorende e-waarde is de `vrije weglengte`

$$\lambda_{\text{mfp}} \equiv \frac{1}{n\Sigma} \tag{21.7} ♠$$

('mfp' staat voor *mean free path*, gemiddelde vrije weglengte).

Vaak gebruikt men niet alleen de vrije weglengte, maar ook de `botsingstijd` t_c. Die vinden we als we nagaan hoe lang het duurt voordat een deeltje met snelheid v botst:

$$t_c = \frac{\lambda_{\text{mfp}}}{v} \tag{21.8} ♠$$

In het geval van fotonen is de snelheid gelijk aan de lichtsnelheid c, en dus

$$t_c = \frac{1}{n\Sigma c} \tag{21.9} ♠$$

Laten we nu de waarden voor de Zon eens invullen. De gemiddelde dichtheid van de modale ster is ruwweg gelijk aan de dichtheid van oceaanwater op Aarde, een ton per kuub. Het zijn vooral de electronen die met de fotonen botsen. Per proton is er één electron in de ster; de massa van het proton is 1.67×10^{-27} kg, dus de electrondichtheid is om en nabij 10^{30} deeltjes per kuub. De botsingsdoorsnede van het electron is de Thomson-doorsnede, $\Sigma_T = 6.67 \times 10^{-29}$ m^2. Dus vinden we de schatting

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} \approx \frac{1}{66.7} = 1.5 \quad \mathrm{cm} \tag{21.10}$$

De vrije weglengte van een foton in een ster met een straal van zowat een miljoen kilometer is dus op z'n hoogst een paar centimeter! Blijkbaar is het voor een foton ontzettend moeilijk om de weg naar buiten te vinden.

De bijzonder kleine vrije weglengte van fotonen heeft nog een ander gevolg wanneer we opmerken dat de lichtkracht L zeer steil toeneemt met de massa M. Als M erg groot is, is L zo enorm dat de botsingen tussen fotonen en deeltjes een bijdrage gaan leveren aan de druk. In dat geval is P niet meer de gewone gasdruk die we uit de thermodynamica kennen, maar de `stralingskracht`

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{L}{c} \tag{21.11}$$ ♠

waarin c de lichtsnelheid. In de vergelijking van de hydrostatica moeten we dan een extra drukgradiënt invoeren. De `stralingsdruk` P_r is de kracht per oppervlakte, dus

$$P_r = \frac{F_{\mathrm{rad}}}{4\pi r^2} \tag{21.12}$$

Als de straling zich over een afstandje Δr naar buiten wurmt, is de verandering ΔP_r evenredig met het aantal vrije weglengtes λ_{mfp} in Δr, dus

$$\Delta P_r = \frac{L/c}{4\pi r^2}\frac{\Delta r}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \tag{21.13}$$

ofwel, gebruik makend van Eq.(21.7) voor de vrije weglengte,

$$\Delta P_r = \frac{L}{c}\frac{\Sigma n}{4\pi r^2}\,\Delta r \tag{21.14}$$

en in de limiet voor infinitesimale stapjes vinden we de stralingsdrukgradiënt

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{L}{c}\frac{\Sigma n}{4\pi r^2} = \frac{L}{c}\frac{\Sigma \rho}{4\pi \mu r^2} \tag{21.15}$$

Omdat L zo sterk toeneemt met M, besluiten we dat in zeer massieve sterren de stralingsdruk de ster uiteen kan blazen. Daardoor is er een tamelijk *lage* bovengrens aan de massa van sterren: bij uitrekenen blijkt dat sterren met een massa van meer dan zo'n honderd zonsmassa's niet stabiel kunnen zijn.

Laten we eens schatten wat die bovengrens zou kunnen zijn. Als de stralingsdruk de structuur van de ster domineert, kunnen we Eq.(21.15) invullen in de vergelijking voor het hydrostatisch evenwicht en vinden

$$\frac{\Sigma}{4\pi\mu}\frac{L}{c} = GM(r) \tag{21.16}$$

Inplaats van deze lastige vergelijking op te lossen, schatten we brutaalweg dat $M(r) \approx M$ (de totale massa van de ster) en vinden: *de lichtkracht van een door stralingsdruk gedomineerde ster is evenredig met de massa van de ster,*

$$L = 4\pi\frac{c}{\Sigma}G\mu M = 6.30\ M \quad \mathrm{W} \tag{21.17}$$

Oefening.

Reken met Eq.(21.17) uit wat de maximale lichtkracht is van de Zon. Wat is de conclusie uit het feit dat de waargenomen lichtkracht zoveel kleiner is dan de berekende waarde?

Vervolgens roepen we de massa-lichtkracht relatie te hulp. Als we even niet op de constanten letten, hebben we dan

$$L = \alpha M \quad \text{en} \quad L = \beta M^{10/3} \tag{21.18}$$

waaruit we besluiten dat de maximale massa van een ster gevonden kan worden uit

$$M_{\max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3/7} \tag{21.19}$$

Vullen we de constanten in, dan komt er

$$M_{\max} = 3.36 \times 10^{32} \quad \text{kg} \ = 169 \quad M_{\odot} \tag{21.20}$$

Dit is een primitieve versie van de `Eddington limiet`. De bijbehorende lichtkracht is

$$L_{\max} = 2.1 \times 10^{33} \quad \text{W} \ = 5.5 \times 10^{6} \quad L_{\odot} \tag{21.21}$$

Een ster met 5 à 6 miljoen maal de lichtkracht van de Zon zou uiteraard bijzonder opvallend zijn! De meest massieve sterren ooit gevonden, hebben een massa ergens tussen de 100 en 150 zonsmassa's. Dat klopt dus wel met de hier gegeven schatting.

Wanneer je met behulp van de vrije weglengte wilt uitrekenen hoever je komt bij herhaalde verstrooiing, dan moet je er rekening mee houden dat bijna altijd de richting van het onderschepte deeltje tussen twee opeenvolgende botsingen drastisch verandert. Het deeltje voert een `dronkemanswandeling` uit (in het Engels: `random walk`). Dat is nogal wat anders dan bewegen in een rechte lijn. Als de vrije weglengte λ_{mfp} is, en de af te leggen weg is R, dan zou je verwachten dat het aantal stappen N waarin R wordt overbrugd gelijk is aan

$$N = \frac{R}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \tag{21.22}$$

Maar zo is het niet, want in een meerdimensionale ruimte ligt het $i+1$-ste stapje $\vec{r}_{i+1}$ niet precies in het verlengde van $\vec{r}_i$. In het algemeen zijn twee opeenvolgende stappen niet gecorreleerd, en dus is de gemiddelde afstand (aangegeven met $< \, >$) die na N stappen is bereikt, nul:

$$< \vec{r} >= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i = 0 \tag{21.23}$$

Met andere woorden, als je niet weet waar je heen wilt, kom je nergens. Maar dat wil niet zeggen dat een deeltje dat een dronkemanswandeling uitvoert, precies op $\vec{r} = 0$ blijft staan, want de verwachtingswaarde van de absolute waarde van $\vec{r}$ is *niet* gelijk aan nul. Immers,

$$< r^2 >= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \ldots)^2 = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 + \sum_{i,j} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \tag{21.24}$$

Omdat de stappen niet met elkaar gecorreleerd zijn, is de gemiddelde som over de producten $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ nul, en daarom is

$$< r^2 >= \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \tag{21.25}$$

De gemiddelde waarde van $|\vec{r}_i|$ is de vrije weglengte λ_{mfp}, zodat

$$< r^2 >= N \, \lambda_{\mathrm{mfp}}^2 \tag{21.26}$$

Hieruit concluderen wij, dat de gemiddelde afstand R vanaf het vertrekpunt die het deeltje in N stappen heeft bereikt gegeven wordt door

$$R = \lambda_{\mathrm{mfp}} \sqrt{N} \tag{21.27}$$

Dat is nogal wat anders dan Eq.(21.22) ! Laten wij eens uitrekenen hoeveel tijd een foton nodig heeft om van het centrum van een ster tot aan het oppervlak te komen. Uit Eq.(21.7,9,27) zien we dat

$$t = N \frac{\lambda_{\mathrm{mfp}}}{c} = \frac{R^2}{\lambda_{\mathrm{mfp}}^2} \frac{\lambda_{\mathrm{mfp}}}{c} = \frac{R^2}{c \lambda_{\mathrm{mfp}}} = \frac{1}{c} R^2 n \Sigma \tag{21.28}$$

Vullen wij de gegevens in die we ook gebruikten in Eq.(21.10) dan blijkt dat voor een ster als de Zon, waar $R = 7 \times 10^8$ m,

$$t = 1.1 \times 10^{11} \quad \mathrm{s} = 3500 \quad \mathrm{yr} \tag{21.29}$$

Het duurt dus op zijn minst vele duizenden jaren voordat een foton zich naar buiten heeft geworsteld. Preciezere berekeningen laten zien dat de vrije weglengte in de kern van een ster nog veel kleiner is dan het gemiddelde Eq.(21.10) zodat de tijd in Eq.(21.29) uitkomt op miljoenen jaren. *Fotonen zitten gevangen* in een ster, en worden slechts sporadisch vrijgelaten. Dit heeft belangrijke gevolgen voor het gedrag van een ster. Zo zien wij bijvoorbeeld dat de tijdschaal in Eq.(21.29) veel korter is dan de dynamische tijdschaal $1/\sqrt{G\rho}$, waaruit wij concluderen dat bij dynamische veranderingen van een ster (zoals oscillaties) het thermische gedrag van de fotonen altijd meeberekend moet worden. Bij trillingen van de ster zitten de fotonen gevangen en bewegen met de materie van de ster mee.

Oefening.

Beredeneer dat dit inhoudt dat een ster maar langzaam van toestand kan veranderen. Maak hiertoe een schatting van de karakteristieke dynamische tijdschaal van een ster.

---

22. Banen van sterren

Een ster kan niet veel minder massa bevatten dan een tiende zonsmassa, want dan is het inwendige te koel voor kernfusie en straalt dus niet. Een ster die zwaarder is dan ongeveer honderd zonsmassa's daarentegen is zo heet dat hij door zijn eigen straling uitelkaar geblazen wordt. Dus zijn superzware sterren onmogelijk. Een sterrenstelsel zoals onze Melkweg wordt dus niet gedomineerd door een enkele massa, zoals ons Zonnestelsel, maar is een gravitationele 'democratie'. Als de gezamenlijke verdeling van de sterren in de ruimte ongeveer bolvormig is, kunnen wij de bekende vergelijkingen voor beweging onder invloed van een centrale kracht ook toepassen op sterrenstelsels.

Een sterrenstelsel zoals onze Melkweg bevat een paar honderd miljard sterren. Omdat een ster niet veel meer massa kan bevatten dan zo'n honderd zonsmassa's verwachten we niet dat een sterrenstelsel een 'gravitationele dictatuur' is, zoals ons Zonnestelsel waar de centrale ster de dienst uitmaakt, maar een 'gravitationele democratie' waar alles wat er gebeurt dynamisch tot stand komt door het gezamenlijke effect van zeer vele, ruwweg equivalente, massa's.

De eerste vraag die we ons dan moeten stellen is: mogen we die honderden miljarden sterren wel beschouwen als puntmassa's? Wat is de botsingskans? Om dat uit te rekenen maken we weer gebruik van de bekende formule voor de vrije weglengte,

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} = \frac{1}{\Sigma n} \tag{22.1} \spadesuit$$

Nu schatten we dat onze Melkweg ongeveer één ster per kubieke parsec bevat. Het trefvlak Σ is vergelijkbaar met de doorsnede van de Zon, dus 10^{16} vierkante meter ofwel zowat 10^{-16} vierkante parsec. Dus schatten we dat

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} \approx 10^{16} \quad \mathrm{pc} \tag{22.2}$$

De straal van een gewoon sterrenstelsel is niet meer dan enkele tientallen kiloparsec, dus *de vrije weglengte van een ster is* 10^{12} *maal groter dan de afmeting van het sterrenstelsel.* Als zo'n stelsel 10^{11} sterren bevat, is de kans dus 10% dat één enkel paar sterren tegen elkaar botst als ik twee sterrenstelsels door elkaar heen schuif. Sterrenstelsels zijn dus bijna volmaakt `botsingsloos` te noemen.

We kunnen dus proberen de bewegingen in een sterrenstelsel op te lossen door de banen van de sterren direct met de Newton-methode te berekenen. Maar omdat we dan de paarsgewijze wisselwerkingen van alle 10^{11} sterren zouden moeten berekenen, verwachten we minstens $(10^{11})^2 = 10^{22}$ wiskundige bewerkingen te moeten uitvoeren. Dat is nogal veel. We proberen daarom de *gemiddelde* structuur van een sterrenstelsel te vinden. Het komt erop neer dat we een massaverdeling $M(r)$ voorstellen, en proberen te berekenen hoe elke ster beweegt door de oude vertrouwde baanvergelijkingen op te lossen:

$$\frac{dv}{dt} = g(r) + \Omega^2 r = g(r) + \frac{J^2}{m^2 r^3} = g_{\mathrm{eff}} \tag{22.3} \spadesuit$$

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{J}{mr^2} \tag{22.4} \spadesuit$$

Nu wordt $g(r)$ niet langer bepaald door een dominante massa M, maar door een massaverdeling $M(\vec{r})$, en dus is

$$\vec{g} = -G\frac{M(\vec{r})}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{22.5} \spadesuit$$

Voorlopig veronderstellen we dat de massaverdeling bolvormig is. Waarnemingen aan de buitenste delen van sterrenstelsels, de `halo`, laten zien dat dat zo gek nog niet is. Dan hebben we

$$g(r) = -G\frac{M(r)}{r^2} \tag{22.6} \spadesuit$$

We kunnen nu de hele machinerie van cirkelbanen en kleine afwijkingen daarvan loslaten op de effectieve versnelling die we met deze g vinden. Maar daarmee zijn we er nog niet, want een sterrenstelsel is een gravitationele democratie; bijgevolg moeten we er rekening mee houden dat $M(r)$ helemaal niet vrij te kiezen is, maar dat integendeel *de massaverdeling wordt bepaald door alle sterbanen tesamen.* We hebben dus een kip-of-ei-probleem, deftig `zelfconsistentieprobleem` genoemd. Het oplossen daarvan is iets waarop nog menigeen zal promoveren, dus daar zien we hier even vanaf. We beperken ons tot de analyse van (bijna)cirkelbanen.

We berekenen een eenvoudig maar nuttig voorbeeld, het `Plummer model`, gegeven door de massaverdeling

$$M(r) = M\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}\right)^3 = M\,r^3\left(r^2+b^2\right)^{-3/2} \tag{22.7}$$

Hierin zijn M en b constanten; M is de massa van het stelsel gezien op $r = \infty$, en b is een lengteschaal die de `kernlengte` genoemd wordt. Met deze veronderstelling over de massaverdeling zien we dat de effectieve radiële versnelling is

$$g_{\mathrm{eff}} = -GMr\left(r^2+b^2\right)^{-3/2} + \Omega^2 r \tag{22.8}$$

Hieruit vinden we zonder verdere omwegen dat op cirkelbanen

$$\Omega^2 = GM\left(r^2+b^2\right)^{-3/2} \tag{22.9}$$

Dit is de zoveelste variatie op de Derde Wet van Kepler!

Oefening.

Bereken hoe deze 'galactische derde wet van Kepler' er uitziet in de limiet voor zeer grote afstanden, $r \to \infty$, en nabij de kern van het sterrenstelsel, $r \approx 0$. Klopt dat met wat je verwacht?

Uit Eq.(22.9) kunnen we meteen afleiden dat de draaiingssnelheid van sterren op cirkelbanen gegeven wordt door

$$v_t = \Omega r = \sqrt{GM}\left(r^2 + b^2\right)^{-3/4} r \tag{22.10}$$

Dit houdt onder andere in dat we, door de `draaiingskromme` $v_t(r)$ van een sterrenstelsel te meten, kunnen berekenen wat de massa M van het stelsel is. Op deze en soortgelijke manieren zijn we er achter gekomen dat de meeste sterrenstelsels massa's hebben van de orde van de massa van onze eigen Melkweg, zowat $10^{11}\, M_\odot$.

Oefening.

Maak een grafiek van de functie in Eq.(22.10) en vergelijk die met draaiingskrommen gepubliceerd in de sterrenkundige literatuur. Blijkt de overeenkomst goed te zijn? Wat zouden de oorzaken kunnen zijn van gevallen waar ernstige afwijking is?

Oscillaties rondom deze cirkelbanen berekenen we weer net als tevoren. De epicykelfrequentie in Eq.(13.10) is

$$\kappa^2 = r\frac{d\Omega^2}{dr}\bigg|_R + 4\Omega^2 \tag{22.11}$$

en samen met Eq.(22.9) vinden we dan

$$\kappa^2 = GM\left(R^2 + 4b^2\right)\left(R^2 + b^2\right)^{-5/2} = \Omega^2\left(\frac{R^2 + 4b^2}{R^2 + b^2}\right) \tag{22.12}$$

ofwel, na een simpele worteltrekking,

$$\kappa = \Omega\left(\frac{R^2 + 4b^2}{R^2 + b^2}\right)^{1/2} \tag{22.13}$$

Het is zonder veel moeite in te zien dat het gedrag van κ in de twee bovengenoemde limieten precies is wat we verwachten, namelijk

$$\kappa(R = \infty) = \Omega \quad \text{(Keplerbaan)} \tag{22.14}$$

$$\kappa(R = 0) = 2\Omega \quad \text{(harmonische oscillator)} \tag{22.15}$$

De tweede limiet is een harmonische oscillatie in de parabolische 'potentiaalput' van de massaverdeling nabij $r = 0$.

Oefening.

(1) Bereken de assenverhouding van de epicykels als gegeven in Eq.(13.16) en laat zien dat de limietgevallen $R = \infty$ en $R = 0$ kloppen met de verwachtingen. (2) Onderzoek op basis van Eq.(22.13) bij welke waarden van R *resonanties* optreden, dwz. $m\kappa = n\Omega$ met gehele getallen m en n. Dit is een probleem met zeer verstrekkende vertakkingen. Veel van de theoretische analyse van structuur in sterrenstelsels gaat uit van berekeningen van dit type.

---

23. Newton-kosmologie

Op zeer grote afstand, boven ongeveer een miljard jaar, is het Heelal isotroop: het ziet er in alle richtingen hetzelfde uit. Tenzij wij een zeer bijzondere plaats innemen in ruimte of tijd, betekent dit dat het Heelal ook homogeen is: op een gegeven tijdstip is de toestand overal in het Heelal gemiddeld hetzelfde. Daarom is een bol met een voldoende grote straal een goede afspiegeling van het Heelal als geheel. Hieruit volgt, dat het Heelal maar op één manier kan bewegen: door uniforme verandering van de ruimtelijke schaal. Zodoende kunnen wij onze oude bekende vergelijkingen voor beweging onder invloed van een centrale kracht ook hier gebruiken. De oplossingen zijn van hetzelfde type als tevoren, analoog aan de Kepler-oplossingen, maar nu voor rechtlijnige banen.

Een van de meest wonderlijke, en tot dusver onbegrepen, eigenschappen van ons Heelal is dat het er – mits we ons beperken tot voorwerpen op zeer grote afstand, zeg meer dan een miljard jaar ver – in alle richtingen gemiddeld hetzelfde uitziet. Het Heelal is `isotroop`. Dit staat in krasse tegenstelling tot het zeer nabije Heelal: de objecten in ons Zonnestelsel staan altijd binnen een smalle band aan de hemel (de Dierenriem). Evenzo met objecten op middelgrote afstand: de sterren in ons sterrenstelsel staan voor het merendeel binnen de band van de Melkweg. Op grote afstand zien we `clusters van sterrenstelsels` tot een paar honderd megaparsec, maar op afstanden boven een gigaparsec wordt de verdeling van materie steeds gelijkmatiger.

Tenzij wij een uitzonderlijke positie innemen in ruimte of in tijd, moeten we concluderen dat het Heelal isotroop is *op alle tijden en gezien vanuit alle standpunten* in de ruimte. Daaruit volgt dat het Heelal ook `homogeen` is: de massadichtheid is gemiddeld overal hetzelfde. We zien dit direct in door vast te stellen dat een gegeven punt in de ruimte door een passende draaiing om een willekeurig centrum altijd kan worden overgevoerd in een ander punt.

Laten we nu veronderstellen dat deze eigenschap exact geldt. Dat betekent: *het Heelal heeft geen enkele structuur.* Er zijn geen sterrenstelsels, geen sterren, zelfs geen atomen, de materieverdeling is volmaakt glad. We zagen al dat dit op kleinere schaal (onder de 100 megaparsec of zo) beslist onjuist is, en op kleine schaal verwachten we dan ook problemen. Niettemin kunnen we op grote schaal de vraag stellen: *hoe kan een Heelal dat homogeen is en isotroop, bewegen?* Als er bijzondere gebieden aan de hemel waren (zoals Dierenriem of Melkweg) dan wisten we het wel: de bewegingen zouden in een schijf liggen. Maar dat kan nu niet, want een heelal waarin het er aan de hemel overal hetzelfde uitziet moet ook overal hetzelfde bewegen.

Scherper geformuleerd: het snelheidsveld $\vec{v}$ moet zo zijn dat de vervorming die het teweeg brengt overal dezelfde is. Dat betekent het volgende. Laat v_i de component van de snelheid zijn in de richting van de coördinaat x_i. Neem nu een klein stapje Δx_j in de richting van de x_j-coördinaat en kijk hoe $\vec{v}$ verandert. Deze verandering noemen we $\mathcal{Q}$, en omdat zowel $\vec{v} = (v1, v2, v3)$ als $\vec{r} = (x1, x2, x3)$ 3-vectoren zijn is $\mathcal{Q}$ een 3×3 object, de `vervormingstensor`

$$\mathcal{Q}_{ij} = \frac{\Delta v_i}{\Delta x_j} \tag{23.1}$$

In de limiet voor infinitesimale stapjes schrijven we

$$\mathcal{Q}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{23.2}$$

De notatie $\partial f / \partial y$ betekent dat we de afgeleide van f nemen naar de variabele y, terwijl we ervoor zorgen dat alle andere variabelen waar f nog van zou kunnen afhangen hetzelfde blijven (dat heet een `partiële afgeleide`).

In een homogeen isotroop heelal is de vervormingstensor constant, en de vervorming mag geen voorkeursrichtingen hebben. In eerste instantie zou je denken dat de eenvoudigste oplossing voor een heelal dat 'overal hetzelfde beweegt' gegeven wordt door $\vec{v} = 0$. Dat is echter onmogelijk vanwege de zwaartekracht: alle materie en energie trekt elkaar aan, en dan is er geen evenwicht mogelijk. Vervolgens zou je kunnen denken dat dan tenminste $\mathcal{Q} = 0$ zou kunnen zijn. Dat betekent echter wegens Eq.(23.2) dat

$$\vec{v} = \text{constant} \tag{23.3}$$

Maar deze constante snelheid kunnen wij wegtransformeren met behulp van de Galilei-Huygens symmetrie, dus dan zitten we weer met het geval $\vec{v} = 0$. Het enige alternatief is

$$\mathcal{Q}_{ij} = \text{constant} \tag{23.4}$$

Daarmee ligt de vorm van het snelheidsveld meteen vast, want als $\mathcal{Q}$ geen voorkeursrichtingen mag hebben dan moet $\mathcal{Q}$ een scalair veelvoud zijn van de eenheidsmatrix, en zodoende moet

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = H\,\delta_{ij} \tag{23.5}$$

waarin δ_{ij} de Kronecker delta. De scalar H mag niet van de ruimte-coördinaten afhangen, maar desnoods wel van de tijd. Het geestige is nu dat Eq.(23.5) direct geïntegreerd kan worden, en zo vinden we dat

$$\vec{v} = H\,\vec{r} \tag{23.6} ♠$$

Dit is de `Hubble relatie`, een verband tussen de afstand $\vec{r}$ tussen twee sterrenstelsels en hun snelheidsverschil $\vec{v}$.

De kinematische relatie Eq.(23.6) betekent ten eerste dat de snelheden van alle sterrenstelsels ten opzichte van elkaar zo zijn dat, gezien vanuit een gegeven stelsel, alle andere *radieel* bewegen. Er is dus sprake van een *uitdijing* als het Hubble-getal H positief is, en van een *inkrimping* als $H < 0$. Uit waarnemingen blijkt dat aan Eq.(23.6) zeer goed voldaan is, en $H > 0$: ons Heelal dijt uit. Ten tweede zien we bij nadere beschouwing dat Eq.(23.6) betekent dat, in een gegeven tijdsinterval, alle afstanden in het Heelal met een vaste factor toenemen. *Het enige spoor van structuur dat in een homogeen isotroop heelal overblijft is de* `schaalfactor` *van het heelal.* Anders geformuleerd: pak de blauwdruk van zo'n heelal. Op die tekening staat in het geheel niets, want een homogeen isotroop heelal heeft geen structuur. Het enige wat er op staat is: "Heelal, stuks 1, schaal 1:a". Hierin is de schaalfactor a een getal dat nog van de tijd kan afhangen (omdat ook H in Eq.(23.6) een functie van t kan zijn).

Deze verrassende vondst is de basis van het `Oerknal-model`. Uitgaande van de *waarneming* van isotropie, en in de *veronderstelling* dat wij geen bijzondere plaats in tijd of ruimte innemen, hebben we *bewezen* dat het Heelal alleen maar kan bewegen volgens de Hubble-regel Eq.(23.6) . Wie dus aan het Oerknal-model wil tornen mag dat doen, maar het heeft weinig zin om het aan te pakken bij H, zoals af en toe met veel tamtam gebeurt. Als er een afwijking is, dan moet die te vinden zijn in het gedrag van de isotropie: pas zodra zou blijken dat ons Heelal anisotroop is, zou het Oerknal-model in ernstige problemen komen.

Hierboven hebben we alleen gekeken naar de `kinematica`, dat wil zeggen het type beweging dat mogelijk is, maar we hebben geen bewegingsvergelijkingen opgesteld of opgelost. Die `kosmische dynamica` gaan we nu aanpakken, en dat moet ook want we zagen boven dat H nog wel van de tijd mag afhangen.

Kies een willekeurig punt in het Heelal. Dat mag, want in een homogeen heelal doet het er niet toe waar je gaat staan. Trek om dat centrum een bol met straal R. Dat is zinvol, want in een isotroop heelal blijft een bol een bol wegens Eq.(23.6) , en de grootte van R doet er niet toe want in een homogeen heelal is elk bolletje, hoe klein ook, representatief voor het geheel. Laat de massa binnen de bol M zijn; dan is

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{23.7} ♠$$

In een homogeen heelal is de druk overal hetzelfde, dus versnellingen tengevolge van drukverschillen zijn afwezig. De bewegingsvergelijking voor de bol is dus

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho R \tag{23.8} ♠$$

De energie-integraal hiervan is direct op te schrijven:

$$\frac{1}{2}V^2 = \mathcal{E} + \frac{GM}{R} \tag{23.9 ♠}$$

Hieruit leiden we de eerste-orde bewegingsvergelijking voor R af als

$$V = \frac{dR}{dt} = \sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2GM}{R}} \tag{23.10 ♠}$$

Voordat we proberen dit op te lossen, merken we op dat, ten eerste, in de limiet voor zeer kleine R de beweging niet meer afhangt van de constante $\mathcal{E}$. Ten tweede, in de limiet $R \to \infty$ is

$$V(R \to \infty) = \sqrt{2\mathcal{E}} \tag{23.11}$$

Ten derde, als $\mathcal{E} < 0$ kan R niet oneindig groot worden, maar heeft een maximale waarde

$$R_{\max} = -\frac{GM}{\mathcal{E}} \tag{23.12}$$

Ten vierde, als $\mathcal{E} = 0$ is de uitdijingssnelheid V exact nul op het moment dat de gemiddelde afstand R tussen de sterrenstelsels oneindig is. Ten vijfde, als $\mathcal{E} > 0$ is de uitdijingssnelheid V positief, zelfs als de sterrenstelsels oneindig ver uit elkaar staan. Ten zesde, omdat de kinematische analyse oplevert $V = HR$, volgt uit Eq.(23.10) dat

$$H = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2} + \frac{2GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2} + \frac{8}{3}\pi G\rho} \tag{23.13}$$

Het interessante hiervan is dat dit een methode oplevert waarmee we (in principe!) de massadichtheid van het Heelal kunnen bepalen uit

$$\frac{8}{3}\pi G\rho = H^2 - \frac{2\mathcal{E}}{R^2} \tag{23.14}$$

Tenslotte merken we nog op dat de massadichtheid ρ direct samenhangt met de versnelling dV/dt, want Eq.(23.8) zegt dat

$$\frac{1}{R}\frac{dV}{dt} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \tag{23.15}$$

Dat was ook wel te verwachten: de uitdijing wordt immers vertraagd door de onderlinge aantrekking van de materie in het Heelal, die weliswaar geen structuur heeft in het Oerknal-model maar toch zwaartekracht veroorzaakt. In practische toepassingen wordt vaak gekozen voor een iets andere vorm van Eq.(23.15) waarin de versnelling dimensieloos wordt gemaakt door passende schaling met H. De zo geconstrueerde dimensieloze `vertragingsparameter` is

$$q \equiv -\frac{1}{H^2}\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dt^2} \tag{23.16 ♠}$$

Stoppen we de bewegingsvergelijking hierin, dan wordt

$$q = \frac{4}{3}\pi G\rho\left(\frac{2\mathcal{E}}{R^2} + \frac{8}{3}\pi G\rho\right)^{-1} = \left(2 + \frac{6\mathcal{E}}{\pi G\rho R^2}\right)^{-1} \tag{23.17}$$

Laten we nu Eq.(23.10) proberen te integreren in het unieke geval dat $\mathcal{E} = 0$. Dan is

$$\sqrt{R}\frac{dR}{dt} = \sqrt{2GM} \tag{23.18}$$

hetgeen onmiddellijk integreert tot

$$\frac{2}{3}R^{3/2} = (t - t')\sqrt{2GM} \tag{23.19}$$

De integratieconstante t' is niet belangrijk, want die geeft alleen maar aan wanneer we het nulpunt van de tijd kiezen. We stellen $t' = 0$ en vinden

$$R = \left(\frac{9}{2}GM\right)^{1/3} t^{2/3} \qquad (23.20) \spadesuit$$

Schrijven we dit in de vorm $R^3 \propto t^2$ dan herkennen we de vorm: alwéér een variant van de Derde Wet van Kepler! Het heelalmodel $\mathcal{E} = 0$ met de oplossing Eq.(23.20) heet het `Einstein-De Sitter model`. Uit het bovenstaande zagen we al waarom dit model zo belangrijk is: *in de limiet $R \to 0$ convergeren alle Oerknal-modellen naar het Einstein-De Sitter model.*

Gebruik makend van Eq.(23.6) en Eq.(23.10) vinden we dat, in het E-DeS model, het getal van Hubble evolueert als

$$H = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3t} \qquad (23.21) \spadesuit$$

Dus H is bepaald niet constant, en het is misleidend om over de “Hubble constante” te praten. Door het waarnemen van snelheden en afstanden van zeer vele sterrenstelsels kunnen we in principe de waarde H_0 van het Hubble-getal op dit moment bepalen, en daarmee hebben we een middel om de leeftijd van het Heelal te berekenen uit

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 1.0 \times 10^{10} \quad \text{jaar} \qquad (23.22)$$

Dit geldt voor het Einstein-De Sitter model, dus $q = 1/2$. In werkelijkheid meten wij $q \approx 0.1$, zodat t_0 iets groter is, namelijk

$$t_0 = 1.3 \times 10^{10} \quad \text{jaar} \qquad (23.23) \spadesuit$$

met een statistische onzekerheid van 8% en een onbekende, maar waarschijnlijk vergelijkbare, systematische fout. Merk op dat het vinden van R en V voor slechts een paar sterrenstelsels, hoe nauwkeurig ook, maar bitter weinig zegt over H, omdat H een *gemiddelde* eigenschap is van de beweging van het Heelal. Dus is middeling vereist over een zeer groot aantal sterrenstelsels tot op zeer grote afstand; immers, we vonden dat het Heelal *pas op grote afstanden* isotroop is! Dat betekent dat we direct al tegen problemen oplopen. Ten eerste is het een forse inspanning om van sterrenstelsels de afstand te bepalen (de snelheid gaat vrij gemakkelijk met de roodverschuiving). Ten tweede moeten we liefst zeer grote waarden van R bereiken, maar dat betekent dat de sterrenstelsels erg lichtzwak zijn. Het laatste woord over H, en vooral q, is voorlopig nog niet gezegd.

24. Special Relativity

Bij nader inzien blijkt de Galilei-Huygens symmetrie niet exact te zijn. Daarvoor in de plaats komt Lorentz symmetrie, die de lichtsnelheid invariant laat. De wiskundige vorm van deze symmetrie wordt afgeleid naar analogie van de klassieke bewegingsvergelijkingen. Een paar eenvoudige toepassingen zijn: de tijddilatatie, het optellen van snelheden, en beweging met een constante versnelling.

Hierboven werden de bewegingsvergelijkingen van de klassieke mechanica afgeleid op grond van de Galilei-Huygens symmetrie. Maar bij nader inzien blijkt, dat onze natuur niet exact aan die symmetrie voldoet. Uit de experimenten van Michelson en Morley (1887-1888) volgt namelijk dat het licht *niet* gehoorzaamt aan die symmetrie. Als licht beweegt met een snelheid c, zouden we volgens Huygens verwachten dat die snelheid slechts relatief is; meebewegen met diezelfde snelheid (en dat kan, door een Galilei-Huygens-transformatie) zou dan een effectieve snelheid $c - c = 0$ opleveren. Maar het `Michelson-Morley experiment` (dat de afgelopen eeuw in vele varianten, met steeds grotere precisie is herhaald) toont aan dat *de lichtsnelheid niet afhangt van de bewegingstoestand van de bron of de ontvanger.* De lichtsnelheid is niet relatief, maar absoluut: de lichtsnelheid is `invariant`.

Dat is totaal strijdig met Galilei-Huygens symmetrie, en daarmee komt de klassieke mechanica op losse schroeven te staan. Het gaat er nu om, een mechanica te bedenken waarin c invariant is. Je zou zo denken dat een dergelijke constructie 'absoluutheidstheorie' of zoiets zou worden genoemd, maar de naam is 'relativiteitstheorie' geworden (Einstein, de bedenker van de theorie, vond die naam ook maar niks). Om in vogelvlucht [*4] te zien hoe deze werkt, gaan we eerst na hoe een G-H-transformatie wordt geformuleerd. Wij beperken ons even tot één ruimte-dimensie. Laat x de positie zijn van een deeltje op tijd t. Het deeltje wordt dus beschreven met de coördinaten (x, t) in een stelsel $\mathcal{K}$. Stel dat een waarnemer in een ander stelsel, $\mathcal{K}'$, met een snelheid w beweegt ten opzichte van $\mathcal{K}$. De coördinaten in $\mathcal{K}'$ zijn (x', t') en volgens Huygens geldt dat

$$x' = x + wt \tag{24.1}$$
$$t' = t \tag{24.2}$$

Een snelheid is $v = dx/dt$, en dus volgt hieruit dat

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + w = v + w \tag{24.3}$$

zoals verwacht. Het is duidelijk dat er, onder de transformatie Eq.(24.3) , nooit een invariante snelheid kan bestaan.

De vraag is nu: wat moet er in de plaats komen voor Eq.(24.1,2) zodat er wèl een invariante snelheid is? Dit kunnen wij beantwoorden door ons eerst te realiseren dat het bestaan van zo'n bijzondere snelheid betekent dat *ruimte en tijd iets met elkaar te maken hebben.* Immers, er geldt

$$\text{snelheid} = \frac{\text{ruimte}}{\text{tijd}} \tag{24.4}$$

dus meters per seconde, kilometers per uur, en dergelijke. Als een snelheid invariant is, dan moeten teller en noemer samenspannen om ervoor te zorgen dat het quotiënt steeds hetzelfde blijft. Ruimte en tijd hebben dus iets met elkaar te maken, sterker nog, ze kunnen met een en dezelfde maat worden gemeten, door als maat voor de afstand de reistijd van het licht te nemen (omdat c invariant is, is dat een prima manier). De afstand van de Aarde naar de Maan is 1.3 seconden, naar de Zon 8.3 minuten, naar de Andromeda Nevel 2 miljoen jaar.

Blijkbaar stelt de Natuur ons de eis: "Ontwerp een mechanica waarin c onveranderd blijft." De symmetrie die c invariant maakt heet `Lorentz symmetrie`. Hieronder zullen we zien op welke manier je zoiets aanpakt, als illustratie van het thema *een formule is er niet in de eerste plaats om in je rekenmachine te proppen, maar om naar je hand te zetten en te analyseren.*

Omdat tijd en ruimte in deze zin 'hetzelfde zijn', ligt het voor de hand om de transformatie Eq.(24.1,2) uit te breiden tot een symmetrische vorm:

$$x' = L_{xx}x + L_{xt}ct \tag{24.5}$$
$$ct' = L_{tx}x + L_{tt}ct \tag{24.6}$$

Dit is eigenlijk de belangrijkste stap van de hele behandeling. Uit het experimentele feit dat c invariant is, concluderen wij dat ruimte en tijd met dezelfde maat te meten zijn, en staan wij toe dat een term evenredig met x verschijnt in de transformatieregel voor de tijd t. Dat betekent iets heel merkwaardigs: namelijk, dat tijd *relatief* kan zijn, omdat het nu niet langer gegarandeerd is dat $t' = t$. Gegeven de mogelijkheid dat x en t in een mengvorm optreden, is het verstandig om ze met dezelfde maat te meten. De beste manier daarvoor is zulke eenheden te kiezen dat $c \equiv 1$, maar dat is onder sterrenkundigen helaas

[*4] Uitgebreide uitleg is te vinden in E.F. Taylor & J.A. Wheeler, *Spacetime phycics,* Freeman, New York 1966; D. Bohm, *The special theory of relativity,* Routledge, London, 1996; A.P. French, *Special relativity,* Chapman & Hall, London, 1997.

niet gebruikelijk. Daarom schrijven we in Eq.(24.5,6) ct inplaats van t. Eq.(24.5,6) komen in de plaats van Eq.(24.1,2) .

Het gaat er uiteraard om, de matrix L te bepalen. Laten we eerst eens zien hoe zoiets gaat in een wat minder exotisch geval: draaiingen. Bij een rotatie van coördinaten (x, y) naar (x', y') hebben we

$$x' = R_{xx}x + R_{xy}y \tag{24.7}$$

$$y' = R_{yx}x + R_{yy}y \tag{24.8}$$

Omdat bij een draaiing alle lengtes hetzelfde blijven, hebben wij

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = r^2 \tag{24.9}$$

Merk op dat het opleggen van de invariantie Eq.(24.9) een voorschrift is voor het afstandsrecept in de ruimte (Pythagoras)! In een ander type ruimte zou dat wel eens helemaal anders kunnen zijn.

Oefening.

Een cirkel is de verzameling van alle punten met een vaste afstand tot een gegeven punt. Teken de cirkels die overeenkomen met het afstandsrecept Eq.(24.9) , met $r^2 = |x| + |y|$ en met $r^2 = x^2 - y^2$.

Passen we Eq.(24.9) toe op Eq.(24.7,8) dan krijgen wij de eisen

$$R_{xx}^2 + R_{yx}^2 = 1 \ ; \quad R_{xy}^2 + R_{yy}^2 = 1 \ ; \quad R_{xx}R_{xy} + R_{yx}R_{yy} = 0 \tag{24.10}$$

Hieraan wordt voldaan door Eq.(24.7,8) te schrijven als

$$x' = x \cos\phi - y \sin\phi \tag{24.11}$$

$$y' = x \sin\phi + y \cos\phi \tag{24.12}$$

waarin ϕ de draaiingshoek.

Op soortgelijke manier gaan we nu de coëfficiënten vinden in Eq.(24.5,6) . De eerste eis die we stellen is, dat de beweging van het licht in de coördinatenstelsels $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}'$ hetzelfde is:

$$x = \pm ct \tag{24.13}$$

$$x' = \pm ct' \tag{24.14}$$

Met behulp van Eq.(24.5,6) volgt hieruit, als we eerst het geval $x = +ct$ nemen, dat

$$ct' = (L_{xx} + L_{xt})\, ct \tag{24.15}$$

$$ct' = (L_{tx} + L_{tt})\, ct \tag{24.16}$$

en dus

$$L_{xx} + L_{xt} = L_{tx} + L_{tt} \tag{24.17}$$

$$L_{xx} - L_{xt} = -L_{tx} + L_{tt} \tag{24.18}$$

waarin de tweede regel op dezelfde manier is afgeleid als de eerste, maar dan voor licht dat de andere kant opgaat, $x = -ct$. *Merk op dat er van deze hele truc niets terecht zou komen als c niet invariant was*, want dan zouden we hebben $x' = \pm c't'$ en schoten we niets op. Uit Eq.(24.17,18) volgen de eerste twee voorwaarden waaraan de transformatiematrix L moet voldoen:

$$L_{xx} = L_{tt} \tag{24.19}$$

$$L_{xt} = L_{tx} \tag{24.20}$$

Hoe komen we nu aan verdere voorwaarden voor L? Het uiteindelijke doel is immers om alle vier de componenten van L dwingend voor te schrijven uit de eis dat c invariant blijft. Merk op dat het helemaal niet voor de hand ligt dat dat ook echt kan! We gaan net zo te werk als in Eq.(24.3) en schrijven

$$\frac{v'}{c} = \frac{dx'}{c\,dt'} = \frac{L_{xx}dx + L_{tx}c\,dt}{L_{tx}dx + L_{xx}c\,dt} = \frac{L_{xx}v + L_{tx}c}{L_{tx}v + L_{xx}c} \tag{24.21}$$

Vervolgens stellen we vast dat voor snelheden ver beneden die van het licht, de GH-symmetrie wel degelijk goed werkt. Dus eisen wij dat, in de limiet voor $c \to \infty$, Eq.(24.21) het resultaat geeft dat $v' = v$, en dus

$$\frac{v}{c} = \frac{v'}{c} \simeq \frac{L_{tx}c}{L_{xx}c} = \frac{L_{tx}}{L_{xx}} \tag{24.22}$$

Er blijft dus nog maar één grootheid te bepalen over, namelijk L_{xx}, en wij kunnen Eq.(24.5,6) schrijven als

$$x' = L_{xx}(x + vt) \tag{24.23}$$

$$ct' = L_{xx}(\frac{v}{c}x + ct) \tag{24.24}$$

Door Eq.(24.23,24) van elkaar af te trekken komt er

$$x' - ct' = L_{xx}(1 - \frac{v}{c})(x - ct) \tag{24.25}$$

Nu komt het slotstuk: in de transformatie die door L wordt beschreven, beweegt het coördinatenstelsel $\mathcal{K}'$ met een snelheid v ten opzichte van $\mathcal{K}$. Uiteraard moet L zo zijn, dat een terugtransformatie met een snelheid $-v$ weer de oorspronkelijke toestand oplevert. Dus hebben we dat naast Eq.(24.25) moet gelden

$$x - ct = L_{xx}(1 + \frac{v}{c})(x' - ct') \tag{24.26}$$

Door substitutie van Eq.(24.25) in Eq.(24.26) komt er

$$L_{xx}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \tag{24.27}$$

waarmee tenslotte de hele matrix L is vastgelegd:

$$L = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \tag{24.28 $\spadesuit$}$$

Dit is de matrix van de `Lorentztransformatie`, die in de plaats komt van de Galilei-Huygens transformatie Eq.(24.1,2) .

Deze transformatie kan uiteraard ook worden uitgeschreven in componenten. Het is gebruikelijk om dat wat af te korten, door gebruik te maken van de definities

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{24.29 $\spadesuit$}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{24.30 $\spadesuit$}$$

waarmee de Lorentztransformatie een plezierig symmetrische vorm aanneemt:

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \tag{24.31 $\spadesuit$}$$

$$ct' = \gamma(\beta x + ct) \tag{24.32 $\spadesuit$}$$

Oefening.

Bewijs expliciet dat L in de limiet voor $c \to \infty$ inderdaad de Galilei-Huygens-transformatie oplevert. Doe dit door een Taylor-ontwikkeling toe te passen op de wortelvorm in Eq.(24.28) .

Oefening.

Bewijs met behulp van Eq.(24.31,32) dat de grootheid $s^2 = c^2t^2 - x^2$ invariant is onder Lorentztransformaties. Men noemt s het `interval`. De invariantie van het interval is analoog aan de invariantie van de straal r van de cirkel in Eq.(24.9) .

De Lorentztransformatie is de basis van de relativistische mechanica. Hier laten we daarvan maar een zeer klein stukje zien. Ten eerste een stelling over het optellen van snelheden in één dimensie. Laat een deeltje een snelheid u hebben in het stelsel $\mathcal{K}$ en laat $\mathcal{K}'$ met een snelheid v bewegen ten opzichte van $\mathcal{K}$. Met welke snelheid beweegt het deeltje gezien vanuit $\mathcal{K}'$? Passen wij Eq.(24.21) toe op u dan zien we (met behulp van Eq.(24.28)) dat

$$\frac{u'}{c} = \frac{dx + v\,dt}{(v/c)dx + c\,dt} = \frac{u+v}{uv/c + c} \tag{24.33}$$

en zodoende

$$u' = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \tag{24.34} \spadesuit$$

Oefening.

Bewijs uit Eq.(24.34) dat de lichtsnelheid de grootst mogelijke snelheid is, door in te vullen $v = c$.

Uit Eq.(24.34) kunnen wij ook nog een vergelijking afleiden voor relativistische beweging onder invloed van een constante kracht. Dit is een nuttige oefening, omdat het laat zien hoe je moet oppassen met uitspraken over snelheden in een relativistische omgeving. Evenals boven beperken wij ons hier tot één ruimte-dimensie.

Stel dat wij een ruimteschip waarnemen dat ten opzichte van ons coördinatenstelsel $\mathcal{K}$ een snelheid v heeft. Aan boord van het ruimteschip gebruikt men stelsel $\mathcal{K}'$, waarin $v' = 0$, want ten opzichte van zichzelf staat het schip stil. De stoker van het ruimteschip gooit er een schepje op, en bereikt daarmee een kleine versnelling $\delta v'$. Met 'klein' wordt uiteraard bedoeld $|\delta v'| \ll c$: in de klassieke mechanica heeft zo'n bewering geen zin, omdat er geen absolute snelheid bestaat en je dus ook niet van 'snel' of 'langzaam' kunt spreken! Gezien door ons verandert de snelheid van het schip van v naar $v + \delta v$. Door de transformatie $\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ in Eq.(24.34) vinden we het verband tussen $\delta v'$ en δv:

$$\delta v' = (v+\delta v)' = \frac{(v+\delta v) - v}{1 - v(v+\delta v)/c^2} \tag{24.35}$$

De veranderingen δ worden als zeer klein beschouwd. Wij maken gebruik van de benadering

$$\frac{1}{1+\epsilon} \simeq 1 - \epsilon \quad ; \qquad \epsilon \ll 1 \tag{24.36}$$

en vinden dan voor Eq.(24.35)

$$\delta v' \simeq \frac{1}{1 - v^2/c^2}\,\delta v \tag{24.37}$$

Stel nu dat de stoker er per tijdseenheid $\delta t'$ een schepje op doet. Vanwege de Lorentztransformatie weten wij dat, gezien vanaf een vast ruimtelijk punt, de tijd transformeert volgens de formule van de `tijddilatatie`

$$t' = t\,\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{24.38}$$

en zodoende is

$$\frac{dv'}{dt'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt} \tag{24.39}$$

Wanneer wij dv'/dt' invullen als een constante a, krijgen we de bewegingsvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{24.40 ♠}$$

Die komt dus in de plaats voor de klassieke vorm $F = ma$.

Het treft dat Eq.(24.40) exact opgelost kan worden. Om de berekeningen gemakkelijker te maken, drukken wij alle snelheden uit in eenheden van c door de transformatie

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \tag{24.41}$$

De oplossing van Eq.(24.40) is dan

$$\frac{at}{c} \equiv \tau = \int \left(1 - \beta^2\right)^{-3/2} d\beta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.42}$$

Hierin is ook ook de tijd dimensieloos gemaakt. Door inversie van Eq.(24.42) wordt de oplossing voor β

$$\beta = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{24.43}$$

We zien nu direct dat in het begin $\tau \approx 0$, als het ruimteschip nog maar net begint met versnellen,

$$\beta = \tau \; ; \qquad \text{en dus} \qquad v = at \tag{24.44}$$

hetgeen precies overeenkomt met het klassieke geval. Als $\tau \to \infty$ daarentegen, hebben we

$$\beta = 1 \; ; \qquad \text{en dus} \qquad v = c \tag{24.45}$$

Ook een oneindig lang volgehouden versnelling brengt ons niet boven de lichtsnelheid uit!

Tenslote berekenen wij nog welke afstand het ruimteschip aflegt. Omdat $v = dx/dt$ hebben we uit Eq.(24.43)

$$\frac{a}{c^2}\frac{dx}{d\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \tag{24.46}$$

met als oplossing

$$\frac{a}{c^2}x = \int \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau = \int \frac{1}{2\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau^2 = \sqrt{1+\tau^2} - 1 \tag{24.47}$$

waarin de integratieconstante zo gekozen is dat het ruimteschip vertrekt van $x = 0$ op $\tau = 0$.

Oefening.

Bereken twee limietgevallen voor Eq.(24.47) , namelijk $\tau \ll 1$ en $\tau \gg 1$. Laat zien dat het eerste geval overeenkomt met het klassiek-mechanische $x = \frac{1}{2}at^2$ en het tweede geval met het extreem-relativistische $x = ct$.

Het leven aan boord gaat gewoon door, en we zien pas merkwaardigheden wanneer wij bezien hoe de tijd bij ons verloopt vergeleken met die welke wij (niet zij!) aflezen op de klok van het schip. Wegens Eq.(24.38) is

$$\tau' = \tau\sqrt{1-\beta^2} \tag{24.48}$$

en dus, gebruik makend van Eq.(24.42) ,

$$d\tau' = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau \tag{24.49}$$

De oplossing hiervan is

$$\tau' = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau = \log\left(\tau + \sqrt{1+\tau^2}\right) \tag{24.50}$$

Opnieuw bekijken we de limietgevallen. Als de versnelling begint, $\tau \simeq 0$, is

$$\tau' \simeq \log(\tau + 1) \simeq \tau \tag{24.51}$$

hetgeen weer precies is wat we klassiek verwachten. Als $\tau \to \infty$ daarentegen, komt er

$$\tau' \simeq \log(\tau + \sqrt{\tau^2}) = \log(2\tau) \tag{24.52}$$

Dus: ten gevolge van de tijddilatatie *zien wij de tijd aan boord van het ruimteschip veel langzamer lopen dan bij ons!*

Oefening.

Reken de versnelling a uit, in de veronderstelling dat de tijdseenheid overeenkomend met $\tau = 1$ precies 1 jaar is. Hoe groot is deze a in vergelijking met de versnelling g van de zwaartekracht aan het oppervlak van de Aarde? Zou het comfortabel zijn aan boord van zo'n ruimteschip?

Oefening.

De afstand van de Zon tot het centrum van de Melkweg is ongeveer 28000 jaar. Als een ruimteschip die afstand overbrugt met de versnelling a uit de vorige som, hoeveel ouder zijn de bemanningsleden dan volgens de boordklok wanneer zij, naar onze tijdrekening, 28000 jaar gereisd hebben? Doe dezelfde berekening voor een sterrenstelsel op een afstand van 10 miljard jaar. Wat zegt dit over de bereikbaarheid (in principe!) van verre plaatsen in ons Heelal?

Tot besluit nog een stuk over de energie van relativistische bewegingen. De arbeid die een kracht F verricht is gelijk aan de kracht vermenigvuldigd met de weglengte. Een klein stukje dx van de weg komt dus overeen met een verandering van de energie E:

$$dE = F\,dx \tag{24.53}$$

In bovenstaande vergelijkingen Eq.(24.43,46) zagen wij, dat

$$dx = \frac{c^2}{a}\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \frac{c^2}{a}\beta\,d\tau \tag{24.54}$$

Merk op dat dit niet alleen voor het raket-voorbeeld geldt, maar *algemeen* is, omdat we slechts infinitesimale veranderingen bezien. Gebruiken we Eq.(24.53) in Eq.(24.54) dan komt er

$$dE = mc^2\beta\,d\tau \tag{24.55}$$

Met behulp van Eq.(24.42) is dit te schrijven als

$$dE = mc^2\frac{\beta\,d\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \tag{24.56}$$

Enig geploeter met integratie laat zien dat dan

$$dE = mc^2\,d\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.57}$$

Omdat dit voor elk infinitesimaal stukje van de baan zo is, hoeven we niets te veronderstellen over F, en dus geldt algemeen dat

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24.58} \spadesuit$$

Dit is Einsteins beroemde massa-energieformule. Dus niet $E = mc^2$, zoals amateurs zeggen! De formule Eq.(24.58) is veel algemener dan dat. In het bijzondere geval van de beweging onder invloed van een constante kracht F (constant zoals gezien door de raket) hebben we uit Eq.(24.43,47,58)

$$E = mc^2\sqrt{1+\tau^2} = mc^2 + Fx \tag{24.59}$$

Hoe realistisch is het idee van zo'n voertuig, waarmee wij in principe overal in het Heelal kunnen komen binnen een redelijke eigen tijd? Hoe je zoiets moet bouwen is onbekend, maar in principe is er geen bezwaar tegen. Een mogelijke tegenwerping is, dat de 'brandstof' voor zo'n raket van buiten moet komen. Maar wij weten dat de ruimte tussen de sterren niet leeg is, en de vraag is dus: kan een ruimtevoertuig voldoende materie verzamelen om zichzelf daarmee te versnellen? We bekijken eerst het geval dat de raket reeds relativistisch beweegt, dus $v \approx c$. Dan hebben we wegens Eq.(24.42,59)

$$E = mc^2\tau = amct = amx \tag{24.60}$$

Als het ruimteschip een doorsnede D heeft, kan het over een afstand x een hoeveelheid massa M opscheppen die wordt gegeven door

$$M = \rho D x \tag{24.61}$$

waarin ρ de massadichtheid van het medium waar de raket doorheen beweegt. Hieruit volgt een schatting voor D. Als $\tau = 1$ overeen komt met een jaar, dan is wegens Eq.(24.42)

$$\frac{c}{a}\tau = \frac{c}{a} = 1 \text{ jaar} = 3.156 \times 10^7 \text{ s} \tag{24.62}$$

en dus is de versnelling van zo'n raket

$$a = 9.51 \text{ m s}^{-2} \tag{24.63}$$

hetgeen prettig dicht bij de aardse waarde 9.8 ligt, zodat wij ons aan boord zeer goed zouden voelen (wegens het equivalentie-principe is er geen verschil tussen een versnelling en de zwaartekracht). De energie die we uit de opgeveegde materie kunnen halen is Mc^2, en dus vinden we uit Eq.(24.60,61) dat

$$amx = \rho D x c^2 \quad \rightarrow \quad D = \frac{am}{\rho c^2} \tag{24.64}$$

Nu vullen we een paar schattingen in. Laat de massa m van de raket een miljoen ton zijn (wie weet?) en laat de gewenste versnelling gegeven zijn door Eq.(24.63) . De minimale dichtheid in het Heelal is de gemiddelde massadichtheid tussen de sterrenstelsels. Deze is ongeveer een waterstofatoom per kuub, ofwel

$$\rho = 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} \tag{24.65}$$

Zodoende wordt

$$D = \frac{9.51 \times 10^9}{10^{-26} c^2} = 1.06 \times 10^{19} \text{ m}^2 \tag{24.66}$$

De doorsnede van de raket moet dus ongeveer de wortel hieruit zijn, en dat is ruim 3 miljoen kilometer. De baan van de Maan heeft een straal van 384,000 km, de baanstraal van Mercurius is 57.9 miljoen kilometer. Dus de waarde in Eq.(24.66) is niet absurd groot, hoewel duidelijk niet binnen ons technisch bereik. De toestand wordt iets beter als we in plaats van Eq.(24.65) de gemiddelde dichtheid van de interstellaire materie nemen. Deze is ongeveer een waterstofatoom per kubieke centimeter, dus een miljoen maal groter dan Eq.(24.65) zodat D overeenkomstig kleiner wordt:

$$D = 1.06 \times 10^{13} \text{ m}^2 \tag{24.67}$$

hetgeen betekent dat een raket met een 'schep' van ruim 3000 km doorsnede volstaat. Dat is kleiner dan de straal van Aarde (6371 km). Zoals Ya.B. Zel'dovich bij zulke gelegenheden zei: *It is possible, but it is difficult.*

Een iets nauwkeuriger beschouwing leert, dat de schatting Eq.(24.64) een ondergrens is. Immers, wanneer wij Eq.(24.59) in het algemeen gebruiken (dus niet alleen in het geval $v \approx c$) vinden we in plaats van Eq.(24.64)

$$D = \frac{ma}{\rho c^2} + \frac{m}{\rho x} \tag{24.68}$$

Aan het begin van de reis is $x = 0$, dus om te starten hebben we een veel groter schep-oppervlak nodig. De raket moet dus op de een of andere manier gelanceerd worden. Ook dat hoeft geen probleem te zijn. In de buurt van een ster is ρ vele malen groter dan in de interstellaire ruimte; voor een sterrewind met constante snelheid is $\rho \propto r^{-2}$, waarin r de afstand tot de ster. Samen met Eq.(24.68) zien we daaruit dat het lanceren van zo'n denkbeeldige raket vanuit een planetenstelsel in principe haalbaar is.

Oefening.

Laat met behulp van Eq.(24.62-64) zien dat een raket van het beschreven type zijn eigen massa opveegt in precies 1 jaar, dus over een afstand van 1 lichtjaar.

De afstand tot het centrum van de Melkweg is 28000 jaar, dus om die reis te maken moet de raket evenzoveel maal zijn eigen massa opvegen. Ter vergelijking: een auto van 500 kg die 'een-op-tien' loopt, kan 5000 km afleggen bij het verstoken van zijn eigen massa aan brandstof. Rijdt zo'n auto 28000 maal zijn eigen massa op, dan is de afgelegde afstand 140 miljoen kilometer. Dat is bijna precies de afstand tussen de Aarde en de Zon. Met een snelheid van 200 km/h zou de auto hier 80 jaar over doen. De relativistische raket bereikt het centrum van de Melkweg in iets meer dan bijna 11 jaar (zie Eq.(24.50) voor $\tau = 28000$). Het is aardig dat autorijden binnen ons Zonnestelsel in deze opzichten vergelijkbaar is met relativistisch door de Melkweg rossen.

25. Algemene relativiteit

Omdat de lichtsnelheid eindig en maximaal is, kan een globale symmetrie niet bestaan. Elke symmetrie moet lokaal zijn. Eerst berekenen we het interval, een grootheid die onveranderd blijft bij een globale Lorentztransformatie. We gaan over naar lokale symmetrie door te werken met differenties, analoog aan de werkwijze bij de klassieke mechanica. Lokale Lorentz-symmetrie leidt tot een structuur van tijd-ruimte die wordt beschreven met een soort afstandsrecept. De numerieke factoren in dat recept zijn samengevat in de metrische tensor.

In het vorige hoofdstuk zagen wij, dat de ruimte-tijd (x, t) in een coördinatenstelsel $\mathcal{K}$ wordt omgevormd in de (x', t') in een coördinatenstelsel $\mathcal{K}'$ dat met snelheid v ten opzichte van $\mathcal{K}$ beweegt, volgens de Lorentztransformatie. Deze wordt beschreven door de matrix

$$L = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \tag{25.1} ♠$$

Er is echter een beperking die de toepassing van L wat kunstmatig maakt: de transformatie $\mathcal{K} \to (L) \to \mathcal{K}'$ geldt alleen voor *constante* snelheid $v = \beta c$.

Hoe moeten we nu te werk gaan als v verandert in plaats en in tijd? Op soortgelijke manier als hierboven: wij stellen eerst vast dat L zo gek nog niet is. Wij veronderstellen dat de natuur weliswaar *globaal* niet Lorentz-invariant is, maar dat *locaal* wel de vorm L mag worden gebruikt, zij het dan dat β van plaats tot plaats en van tijd tot tijd verschilt. We kunnen dat in ons formalisme inbouwen door vast te stellen dat een baan $\vec{x}$ die in ruimte-tijd gekromd is, kan worden opgebouwd uit infinitesimale stukjes die elk voor zich een rechte lijn willekeurig dicht benaderen. Door niet globaal te kijken maar locaal, beschouwen wij niet (x, t) maar de differenties (dx, dt). Dus inplaats van

$$x' = \gamma(x + \beta ct) \tag{25.2}$$

$$ct' = \gamma(\beta x + ct) \tag{25.3}$$

krijgen we

$$dx' = \gamma(dx + \beta c\, dt) \tag{25.4}$$

$$c\, dt' = \gamma(\beta dx + c\, dt) \tag{25.5}$$

Om te zien welke, gebruiken wij de fundamentele symmetrie-eigenschap van L. Overal zagen we, dat een symmetrie leidt tot een invariantie, een behouden grootheid. In het geval van de speciale relativiteitstheorie zien we uit Eq.(25.2,3) dat

$$x'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2(x^2 + 2\beta xct + \beta^2c^2t^2 - \beta^2x^2 - 2\beta xct - c^2t^2)$$

$$= \gamma^2(1-\beta^2)(x^2 - c^2t^2)$$
$$= x^2 - c^2t^2 \tag{25.6}$$

Dus de uitdrukking $x^2 - c^2t^2$ heeft een zeer bijzondere eigenschap: onder Lorentztransformaties is

$$x^2 - c^2t^2 = \text{invariant} \tag{25.7}$$

Dit is de grootheid die behouden is dankzij de Lorentz-symmetrie. Uiteraard verdient deze een eigen naam; we noemen s het `interval`, gedefinieerd door

$$x^2 - c^2t^2 \equiv -c^2s^2 \tag{25.8}$$

De invariantie van het interval onder Lorentztransformaties doet zeer sterk denken aan invariantie onder draaiingen. Een draaiing over een hoek ϕ in een (x, y)-vlak wordt beschreven door de rotatiematrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{25.9}$$

zodat de coördinaten transformeren volgens

$$x' = x\,\cos\phi - y\,\sin\phi \tag{25.10}$$
$$y' = x\,\sin\phi + y\,\cos\phi \tag{25.11}$$

Hieruit zien we meteen dat

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \equiv r^2 \tag{25.12}$$

Zoals de voerstraal r invariant is onder draaiingen, zo is het interval s invariant onder Lorentztransformaties. Vergelijken we Eq.(25.8) en Eq.(25.12) , dan zien we deze gelijkenis direct. Alleen dat minteken in Eq.(25.8) is vreemd! Bij verder onderzoek blijkt dat deze malle '$-$' verantwoordelijk is voor bijna alle tegen-intuïtieve eigenschappen van de relativiteit. Merk nog op dat *een lichtstraal heeft interval nul:* voor het licht geldt $s = 0$. Volgens de meetkunde van ruimte en tijd is de 'afstand' tussen het punt waarop het licht wordt uitgezonden en het punt waarop het aankomt, nul. Kijken we naar Eq.(25.3) dan zien wij dat langs een lichtstraal ook geldt $t' = 0$. Ruwweg kunnen wij dus zeggen: *voor een lichtstraal vallen het moment van uitzending en absorptie samen.*

Wij kunnen de invariantie van s gebruiken door te stellen: waar bij constante v een globale Lorentz-symmetrie geldt, daar geldt een *locale* Lorentz-symmetrie in het algemene geval. Dus schrijven we Eq.(25.8) , in navolging van Eq.(25.4,5) , als

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 \tag{25.13}$$

Dit wordt meestal geschreven in de vorm

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 \tag{25.14}$$

Merk op dat dit een wat onzuivere notatie is, want met ds^2 bedoelen we $(ds)^2$ en *niet* $d(s^2)$. Het probleem van een locale Lorentz-symmetrie is nu, dat hierdoor L een functie van de ruimte-tijdcoördinaten is geworden:

$$L = L(x, t) \tag{25.15}$$

Zodoende kan Eq.(25.14) in die vorm maar op één plaats en tijd in het Heelal worden gebruikt, en dat is een beetje weinig. Wij moeten dus een algemenere versie van deze vergelijking vinden. Net als bij de afleiding van de Lorentztransformatie doen we dat, door een algemene bilineaire vorm te proberen:

$$ds^2 = g_{tt}\,dt^2 + g_{tx}\,dt\,dx + g_{xt}\,dx\,dt + g_{xx}\,dx^2 \tag{25.16}$$

Als (x, t) gewone reële getallen zijn, is $dx\, dt = dt\, dx$. Dus moet ook gelden

$$g_{tx} = g_{xt} \tag{25.17}$$

De matrix g is symmetrisch.

Hoe moeten wij nu Eq.(25.16) interpreteren? We kunnen een analogie maken met de vergelijkingen voor krommen in Eq.(25.12,14) : evenals (x, y) de coördinaten zijn van een cirkel met straal r, en evenals (x, ct) de coördinaten zijn van een hyperbool met pericentrum s, zo zijn (dx, dt) *de infinitesimale lijnstukjes die gezamenlijk een kromme bepalen die wordt beschreven door de matrix* g. Dat is nogal dramatisch: blijkbaar is het zo, dat het toepassen van een *locale* Lorentz-transformatie leidt tot een tijd-ruimtestructuur die wordt beschreven met g. De meetkundige eigenschappen van die algemene (dx, dt)-ruimte worden bepaald door g. Deze grootheid heeft men dan ook de `metrische tensor` genoemd. De uitdrukking Eq.(25.16) is een *afstandsrecept*, dat aangeeft hoever het is 'van A naar B' in een ruimte met een algemene structuur. De afstand wordt gemeten met behulp van het interval s.

De theorie welke g en zijn dynamica beschrijft heet de `algemene relativiteitstheorie`. In werkelijkheid bestaat g uit 16 getallen, in een blok van 4×4, maar omdat g symmetrisch is zijn er slechts 10 onafhankelijke componenten.

De structuur van tijd-ruimte die door g wordt beschreven, kunnen we samenvatten door een *kromming*, evenals Eq.(25.12) de kromming van een cirkelboog beschrijft en Eq.(25.14) de kromming van een hyperbooltak. Enigszins kort door de bocht kunnen we stellen: *een gekromde ruimte geeft gekromde banen.* Op deze manier is de theorie van g bruikbaar voor de beschrijving van de zwaartekracht, waarbij de kromming van banen niet wordt toegeschreven aan de werking van een 'kracht-op-afstand', maar aan de locale structuur van tijd en ruimte. Daarvoor is nog wel nodig dat we de rol van de materie erin betrekken, maar voor dit college gaat dat veel te ver. We moeten ons beperken tot de opmerking dat er talloze `metrieken` zijn van het type Eq.(25.16) , waaronder zeer belangrijke en interessante, zoals de `Friedmann-Robertson-Walker metriek` die het Heelal beschrijft, en de `Schwarzschild metriek` van zwarte gaten.

26. Zwarte gaten

Als voorbeeld van de structuur van tijd en ruimte bekijken wij de Schwarzschild-metriek, die het gedrag van bolsymmetrische zwarte gaten beschrijft. Door strikte toepassing van symmetrieregels leiden wij de bewegingsvergelijking af voor licht in de buurt van een zwart gat.

Wij beschrijven de tijd-ruimte nu met bolcoördinaten (t, r, θ, ϕ), waarin t de tijd, r de radiële afstand, θ de elevatie (de hoek langs een meridiaan, gemeten vanaf de noordpool), en ϕ het azimut (de hoek langs een parallel, gemeten vanaf de nulmeridiaan). Een algemene vorm van een bolsymmetrische metriek is te schrijven als

$$ds^2 = \left(1 + 2\Phi/c^2\right) c^2\, dt^2 - \left(1 + 2\Phi/c^2\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{26.1}$$

In het deel waarin $d\theta, d\phi$ voorkomen herkennen wij het oppervlakte-element van een bol. Als wij nu voor de potentiaal Φ de klassieke Newton-vorm nemen, dan is

$$\frac{2\Phi}{c^2} = -\frac{2GM}{c^2 r} \tag{26.2}$$

Wij definiëren de `Schwarzschild-straal` R_S als

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2} \tag{26.3}$$

en de bijbehorende `Schwarzschild-metriek` is

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{26.4}$$

Het is niet gemakkelijk te bewijzen dat dit inderdaad een mogelijke stabiele tijd-ruimtestructuur is. Dat komt pas veel later, bij het onderwerp Algemene Relativiteitstheorie.

Oefening.

Bereken R_S voor de Zon, de Aarde, en een appel. Beredeneer op basis van fysische grootheden waarom de structuur van tijd en ruimte bij de beschrijving van deze voorwerpen geen rol van betekenis speelt.

Het gaat er nu om, uit Eq.(26.4) bewegingsvergelijkingen af te leiden. Opnieuw, dat is nogal ingewikkeld, en we kunnen het algemene geval hier niet helemaal behandelen. Maar een eenvoudige aanzet kan worden gegeven door te kijken naar fotonen op radiële banen, die dus regelrecht naar het zwarte gat toe bewegen. Voor deze zijn elevatie en azimut constant, dus $d\theta = d\phi = 0$. Voor fotonen is bovendien het interval $s = 0$, en zodoende is

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 \tag{26.5}$$

Dit levert meteen een vergelijking voor dr/dt op:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\, c \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \tag{26.6}$$

Dit kan meteen geïntegreerd worden tot

$$c(t - t_0) = \pm \int \left(\frac{r}{r - R_S)}\right) dr = \pm\, (r + R_S\, \log(r - R_S)) \tag{26.7}$$

Wanneer wij de tijd en de radiële afstand dimensieloos maken door als variabelen te nemen

$$\tau \equiv \frac{ct}{R_S}\ ; \qquad x \equiv \frac{r}{R_S} \tag{26.8}$$

dan komt dit er iets eenvoudiger uit te zien:

$$\tau = \tau_0 \pm (x + \log(x - 1)) \tag{26.9}$$

Oefening.

Maak een tijd-ruimte diagram van deze oplossingen. Zet verticaal de tijd τ en horizontaal de radiële afstand x uit. Teken grafieken van de ingaande lichtstralen (minteken in Eq.(26.9)) en de uitgaande (plusteken). Merk op dat de uitgaande lichtstralen allemaal tegen de afstand $x = 1$ aanliggen. Daaruit blijkt dat er geen licht ontsnappen kan vanuit het gebied $x < 1$. Daarom noemt men de bol met straal $r = R_s$ de `horizon`.

Het geval van niet-radiële banen is een stuk lastiger, maar kan worden opgelost door de bolsymmetrie van het probleem uit te buiten. Eerst voeren wij de coördinaten van Eq.(26.8) in in de metriek Eq.(26.4) en krijgen

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{x}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} dx^2 - x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{26.10}$$

Dan zien wij, dat de factoren in de metriek niet van t, ϕ of θ afhangen. Daarvan maken we nu gebruik. Om te beginnen mogen wij $\theta = \text{const}$ nemen, zodat we – net als in het klassieke Kepler-geval – concluderen: *de banen liggen in een vlak*. Voor de inclinatie van dat vlak mogen we nemen $\theta = \pi/2$, zodat

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{x}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} dx^2 - x^2\, d\phi^2 \tag{26.11}$$

In dat vlak gebruiken we poolcoördinaten (x, ϕ), omdat we ook hier met een centrale kracht te maken hebben. Nu nemen wij uiteraard *niet* $\phi = \text{const}$; dat mag wel, maar dan zijn we weer terug bij de boven behandelde radiële banen. De onafhankelijkheid van τ en ϕ geeft twee behouden grootheden: respectievelijk de energie en het impulsmoment, net als in de klassieke mechanica.

Stel dat wij het tijdsinterval $d\tau$ met een klein beetje ϵ laten toenemen tot $d\tau + \epsilon$. Dan veranderen de diverse grootheden in Eq.(26.11) niet, omdat zij niet van de tijd afhangen. De enige grootheid die kan veranderen is het interval ds, en wel van ds naar $ds + \delta$. Stoppen wij dit in Eq.(26.11) , en verwaarlozen wij hogere-orde termen van het type ϵ^2 en $\epsilon\delta$, dan komt er

$$ds^2 + 2\delta\, ds = \left(1 - \frac{1}{x}\right) d\tau^2 + 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\epsilon\, d\tau - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} dx^2 - x^2\, d\phi^2 \tag{26.12}$$

Met behulp van de oorspronkelijke Eq.(26.11) zien we dat hieruit volgt

$$\delta\, ds = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\epsilon\, d\tau \tag{26.13}$$

De verhouding δ/ϵ kan willekeurig worden ingesteld, en is dus een vrije constante. Dit wordt de behouden grootheid die is geassocieerd met de tijdsonafhankelijkheid. We noemen deze grootheid $\mathcal{E}$ en vinden

$$\frac{\delta}{\epsilon} \equiv \mathcal{E} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{d\tau}{ds} \tag{26.14}$$

Evenals in het klassieke geval, is $\mathcal{E}$ de energie per massa-eenheid:

$$\mathcal{E} = \frac{E}{m} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{d\tau}{ds} \tag{26.15}$$

Vervolgens herhalen wij deze truc met het azimut ϕ. Stel dat wij het hoekinterval $d\phi$ met een klein beetje μ laten toenemen tot $d\phi + \mu$. Dan veranderen de diverse grootheden in Eq.(26.11) niet, omdat zij niet van het azimut afhangen: we gebruiken de bolsymmetrie. De enige grootheid die kan veranderen is het interval ds, en wel van ds naar $ds + \delta$. Stoppen wij dit in Eq.(26.11) , en verwaarlozen wij hogere-orde termen van het type μ^2 en $\mu\delta$, dan vinden wij

$$ds^2 + 2\delta\, ds = \left(1 - \frac{1}{x}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} dx^2 - x^2\, d\phi^2 - 2x^2\mu\, d\phi \tag{26.16}$$

Met behulp van de oorspronkelijke Eq.(26.11) zien we dat hieruit volgt

$$-\frac{\delta}{\mu} \equiv \mathcal{J} = x^2\frac{d\phi}{ds} \tag{26.17}$$

Vergelijken wij dit met de klassieke uitdrukking voor het impulsmoment, dan zien we dat $\mathcal{J}$ het impulsmoment per massaeenheid is:

$$\mathcal{J} = \frac{J}{m} = x^2\frac{d\phi}{ds} \tag{26.18}$$

De vergelijkingen Eq.(26.15,18) stellen ons nu in staat om van Eq.(26.11) een bewegingsvergelijking te maken. Delen we de hele vorm door ds^2, en substitueren we Eq.(26.15,18) dan blijkt dat

$$1 = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{\mathcal{J}^2}{x^3} \tag{26.19}$$

Deze vergelijking geldt voor deeltjes met eindige rustmassa. Voor fotonen is $ds = 0$, en vinden wij inplaats van Eq.(26.19)

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} \mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{\mathcal{J}^2}{x^3} \tag{26.20}$$

Op deze manier hebben wij, door steevast van de bol- en tijdsymmetrie gebruik te maken, de volgende drie vergelijkingen gevonden:

$$\frac{d\tau}{ds} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} \qquad \text{(tijddilatatie; grav. roodverschuiving)} \tag{26.21}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\mathcal{J}}{x^2} \qquad \text{(impulsmoment)} \tag{26.22}$$

$$\frac{dx}{ds} = \pm\left\{\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{\mathcal{J}^2}{x^3}\right\}^{1/2} \qquad \text{(impuls)} \tag{26.23}$$

Bovendien weten we dat de baan in een vlak ligt. De vorm van de baan kan worden gevonden door Eq.(26.22,23) op elkaar te delen, net als in het Kepler-geval; dan komt er

$$\frac{dx}{d\phi} = \pm\frac{x^2}{\mathcal{J}}\left\{\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{\mathcal{J}^2}{x^3}\right\}^{1/2} \tag{26.24}$$

Tenslotte kunnen wij de verhouding $\mathcal{J}/\mathcal{E}$ nog wegwerken door opnieuw te kijken naar het analoge Kepler-geval. De verhouding van impulsmoment en energie geeft een lengteschaal b:

$$\frac{\text{energie}}{\text{impulsmoment}} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}} = \frac{1}{b} \tag{26.25}$$

Hierin is b de afstand waarop het foton het punt $x = 0$ zou passeren als er geen afbuiging was (in het Engels: *impact parameter*), in de eenheden van Eq.(26.8) . Met behulp van b wordt Eq.(26.24)

$$\left(\frac{1}{x^2}\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{x^3}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{b^2} \tag{26.26}$$

Merk op dat ongebonden banen (overeenkomend met Kepler-hyperboolbanen) hebben $b^2 > 0$, terwijl bij gebonden banen (ellipsbanen in het Kepler-geval) $b^2 < 0$. Dit is uiteindelijk de bewegingsvergelijking voor licht dat in de buurt van een zwart gat beweegt.

27. Enkele nuttige boeken

De volgende boeken zijn allemaal goed en nuttig. Speciaal aanbevolen voor dit college is het boek van Zeilik & Gregory.

Bakich, M.E., *The Cambridge guide to the constellations,* Cambridge U. Press, 1995

Beatty, J.K., Petersen, C.C., & Chaikin, A., *The new solar system,* Cambridge Univ.Press, 1999

Begelman, M.C., & Rees, M.J., *Gravity's fatal attraction,* Freeman, New York, 1995

Bohm, D., *The special theory of relativity,* Routledge, London, 1996

Broer, H., *Meetkunde en fysica,* Epsilon, Utrecht, 1999

Dehling, H.G., & Kalma, J.N., *Kansrekening,* Epsilon, Utrecht, 1995

Duistermaat, J.J., & Eckhaus, W., *Analyse van gewone differentiaalvergelijkingen,* Epsilon, Utrecht, 1995

French, A.P., *Special relativity,* Chapman & Hall, London, 1997

Grasman, J., *Wiskundige methoden toegepast*, Epsilon,Utrecht, 1992

Horssen, W.T. van, *Differentiaalvergelijkingen,* Epsilon,Utrecht, 1993

Shu, F.H., *The physics of astrophysics. I. Radiation,* Univ. Science Books, Sausalito, 1991

Shu, F.H., *The physics of astrophysics. II. Gas dynamics,* Univ. Science Books, Sausalito, 1992

Taylor, E.F., & Wheeler, J.A., *Spacetime phycics,* Freeman, New York 1966

Temme, N.M., *Speciale functies in de mathematische fysica*, Epsilon, Utrecht, 1990

Tijms, H., *Spelen met kansen,* Epsilon, Utrecht, 1999

Wheeler, J.A., *A journey into gravity and spacetime*, Freeman, New York, 1990

Zeilik, M., & Gregory, S.A., *Introductory astronomy and astrophysics,* Saunders,Fort Worth,1998

Physical constants for Introductory Astrophysics

Physics Today, August 1996, BG9-BG16

Quantity	**Symbol**	**Value**	**Units**
speed of light	c	299792458	m s^{-1}
vacuum permeability	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N A^{-2}
vacuum permittivity	ϵ_0	$1/\mu_0 c^2$	F m^{-1}
Newtonian gravity constant	G	6.6726×10^{-11}	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Planck constant	h	6.626076×10^{-34}	J s
modified Planck constant	$\hbar$	1.0545727×10^{-34}	J s
electron charge	e	1.6021773×10^{-19}	C
proton mass	m_p	1.672623×10^{-27}	kg
neutron mass	m_n	1.674929×10^{-27}	kg
electron mass	m_e	9.1093897×10^{-31}	kg
Thomson cross section	σ_T	6.6652462×10^{-29}	m^2
Boltzmann constant	k	1.380658×10^{-23}	J K^{-1}
Stefan-Boltzmann constant	σ	5.67051×10^{-8}	W $m^{-2}K^{-4}$
solar mass	$M_\odot$	1.989×10^{30}	kg
solar luminosity	$L_\odot$	3.85×10^{26}	W
solar radius	$R_\odot$	6.96×10^{8}	m
mean Earth radius	$R_\oplus$	6.371×10^{6}	m
Earth mass	$M_\oplus$	5.98×10^{24}	kg
semimajor axis of Earth orbit	AU	1.496×10^{11}	m
reference Hubble parameter	h	100	km $s^{-1}Mpc^{-1}$
		3.24149×10^{-18}	s^{-1}
Hubble parameter	H_0	65	km $s^{-1}Mpc^{-1}$
		2.107×10^{-18}	s^{-1}
parsec	pc	3.085×10^{16}	m
year	yr	3.1558×10^{7}	s
		9.4609×10^{15}	m
	1 km s^{-1} = 1.023 pc Myr^{-1}		

Glossary

Contents